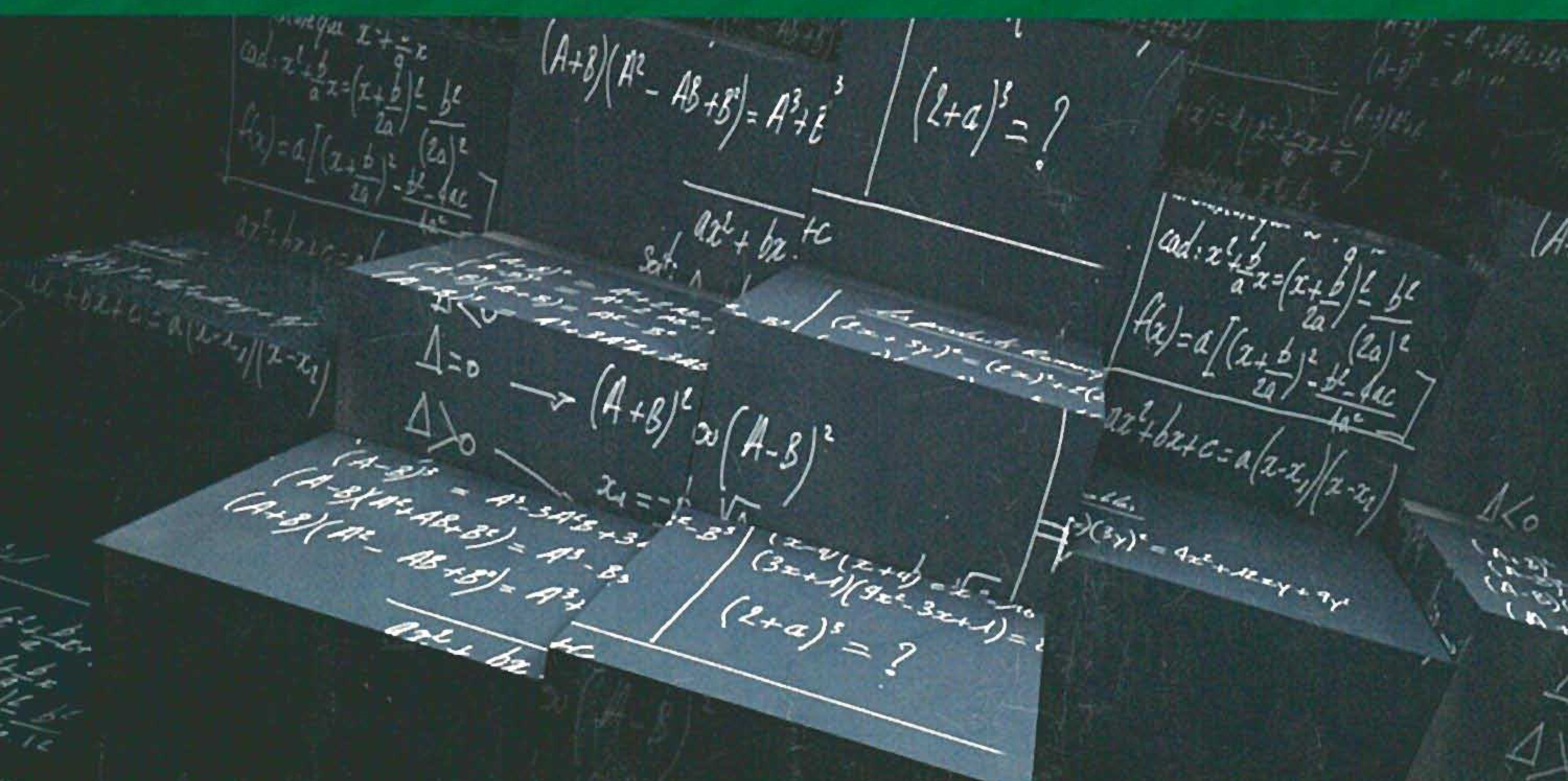
М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 3



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

Институт математики, экономики и информатики

М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В четырех частях
Часть 3

Учебное пособие

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИГУ
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.16
Ф19

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ

Издание выходит в рамках Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012–2016 гг., проект Р121-02-001

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор *Н. А. Сидоров*,
д-р физ.-мат. наук, зав. отделением нелинейных динамических систем и дифференциальных уравнений ИДСТУ СО РАН *А. А. Щеглова*

Ф19 **Фалалеев М. В.**
Математический анализ. В 4 ч. Ч. 3 : учеб. пособие / М. В. Фалалеев. – Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2013. – 154 с.
ISBN 978-5-9624-0825-5 (ч. 3)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Третья часть курса включает теорию числовых рядов, теорию функциональных последовательностей и рядов, теорию интегралов, зависящих от параметра.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информационная безопасность».

Библиогр. 38 назв.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16

Учебное издание

Фалалеев Михаил Валентинович
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
В четырех частях
Часть 3
Редактор *Э. А. Невзорова*
Компьютерный набор *М. В. Фалалеев*
Макет и рисунки подготовлены при помощи системы LaTeX в РИО ИДСТУ СО РАН *Н. В. Починской*
Темплан 2013 г. Поз. 89. Подписано к печати 11.09.2013. Формат 60×90 1/16.
Уч.-изд. л. 5,0. Усл. печ. л. 9,6. Тираж 100 экз. Заказ 92
Издательство ИГУ; 664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36

ISBN 978-5-9624-0825-5 (ч. 3)
ISBN 978-5-9624-0822-4

© Фалалеев М. В., 2013
© ФГБОУ ВПО «ИГУ», 2013

Научная библио[illegible]
Иркутского [illegible]
университета

А 638316

Оглавление

Первые восемь глав:

1. Введение;
2. Предел числовой последовательности;
3. Предел функции. Непрерывность функции;
4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной;
5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана;
6. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана–Стилтьеса;
7. Элементы общей топологии и функционального анализа;
8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

включены в первую и вторую части курса.

9. Числовые ряды

9.1. Понятие числового ряда, сходимости и расходимости числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов

Пусть дана числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Бесконечная сумма вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

называется *числовым рядом* (или просто *рядом*), а числа a_i — *членами* ряда (или *i-м членом*). Из членов этого числового ряда составим конечные суммы вида

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\ \ldots,$$

построенные таким образом суммы называются *частичными суммами ряда*. Числовой ряд (1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм, при этом предел числовой последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм называется *суммой ряда* (1). Таким образом, по определению, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то S — сумма ряда (1), что записывается так

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Если числовая последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Пусть числовой ряд (1) сходится и S — его сумма. В соответствии с определением предела числовой последовательности (см. § 2.1) это означает, что $\forall \epsilon > 0$ существует $N_\epsilon \in N$ такое, что $\forall n > N_\epsilon$ справедливо неравенство $|S_n - S| < \epsilon$. Иначе говоря, при достаточно большом n частичные суммы S_n могут быть сколь угодно близки к S, а значит могут служить приближениями для суммы ряда S причем с любой степенью точности. Разность $R_n = S - S_n$ характеризует ошибку такого приближения и называется *остаточным членом ряда* (1). Очевидно предел остаточного члена сходящегося ряда равен нулю.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)} + \ldots$$

Для общего члена этого ряда справедливо разложение

$$a_i = \frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right),$$

тогда

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Отсюда получаем

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2},$$

т. е. данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример 2 (ряд геометрической прогрессии). Исследовать на сходимость числовой ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^i + \ldots, \quad a \neq 0,$$

при $|q| < 1$ и при $|q| \geq 1$.

Для частичных сумм этого ряда получаем

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и следовательно

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и ряд расходится.

Если $q = 1$, то $S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $q = -1$, то $S_{2n} = 0$ и $S_{2n-1} = a$, а значит ряд расходится.

Пример 3 (гармонический ряд). Исследовать на сходимость числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i} + \ldots,$$

называемый *гармоническим*.

Известно, что числовая последовательность $a_i = \left(1+\frac{1}{i}\right)^i$ монотонно возрастает и ограничена, ее предел $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = e$ (см. § 2.4), и поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i < e.$$

Прологарифмируем по основанию e это неравенство

$$i \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) < 1$$

или
$$\ln\left(1+\frac{1}{i}\right) < \frac{1}{i} \iff \ln(i+1) - \ln i < \frac{1}{i}.$$

Отсюда получаем
$$\sum_{i=1}^{n}(\ln(i+1) - \ln i) < S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i},$$
$$\ln(n+1) < S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i},$$
т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ и ряд расходится.

Замечание (о порядке суммирования). Механически переносить свойства суммы конечного числа слагаемых на ряды, вообще говоря, нельзя. В этом легко убедиться на примере следующего ряда «мигалки»
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$
который, очевидно, расходится, поскольку $S_{2n} = 0$ и $S_{2n-1} = 1$. Перегруппируем члены этого ряда следующими двумя способами:
$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0,$$
$$1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) + \ldots = 1,$$
таким образом, *менять порядок суммирования в произвольном числовом ряде нельзя.* Другой пример. Два ряда
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$
и
$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$
расходятся. Если почленно их сложить, получим
$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

сходящийся числовой ряд.

Приведенные контрпримеры показывают, что свойства числовых рядов существенно отличаются от свойств сумм конечного числа слагаемых. Однако некоторые свойства обычных сумм сохраняются и для рядов. Далее будет показано, что для некоторых рядов можно менять порядок суммирования или выполнять над ними арифметические операции, при этом сохраняя правила этих операций для сумм рядов.

Теорема 1 (линейные свойства сходящихся рядов). *Если сходятся числовые ряды*

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \textit{и} \quad s = \sum_{i=1}^{\infty} b_i,$$

то сходятся числовые ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} (c \cdot a_i) \quad \textit{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i),$$

причем $\quad c \cdot S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (c \cdot a_i) \quad$ *и* $\quad S \pm s = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i).$

Доказательство. При доказательстве воспользуемся свойством линейности сходящихся числовых последовательностей (см. § 2.1). Пусть $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (c \cdot a_i)$, тогда $\sigma_n = c \cdot S_n$ и

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S.$$

Пусть теперь $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i)$, тогда $\sigma_n = S_n \pm s_n$ и

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} s_n = S \pm s.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Сходимость или расходимость числового ряда не изменится, если из него изъять или к нему добавить любое конечное число членов.*

Доказательство. Пусть $\{S_n\}$ — последовательность частичных сумм исходного ряда, а $\{\tilde{S}_n\}$ — последовательность частичных сумм преобразованного ряда, тогда, начиная с некоторого номера N, суммы $\{S_n\}$ и $\{\tilde{S}_n\}$ различаются на одно и то же число A, т. е. $\tilde{S}_n = S_n + A$. Таким образом, если существует или нет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то соответственно существует или нет предел $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n$. **Теорема доказана.**

Теорема 3. *Сумма сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ расходится, поэтому последовательность $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ сходится, а последовательность $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ расходится, тогда методом от противного получаем расходимость последовательности $\sigma_n = S_n + s_n$. **Теорема доказана.**

Теорема 4 (о перестановке членов ряда с положительными членами). *Сумма сходящегося ряда с положительными членами не зависит от порядка суммирования членов ряда, или иначе, два сходящихся ряда с положительными членами, отличающихся лишь порядком своих членов, имеют одну и ту же сумму .*

Доказательство. Прежде всего поясним, что два числовых ряда с положительными членами $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i,\ a_i > 0\ (A)$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i,\ b_i > 0\ (B)$ называют *отличающимися лишь порядком своих членов*, если каждое число, являющееся членом ряда (A), входит также в ряд (B), и при этом столько же раз; и наоборот, всякое число, являющееся членом ряда (B), фигурирует и в ряде (A), и опять столько же раз.

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Так как каждый из слагаемых a_i, входящих в S_n, является некоторым членом ряда (B), то, взяв достаточно большое число m первых слагаемых ряда (B), мы достигнем того, что среди них окажутся все первые n членов ряда (A). Пусть $\sigma_m = \sum_{i=1}^{m} b_i$, очевидно $S_n \le \sigma_m$. Пусть ряд (B) сходится и σ — его сумма, тогда $S_n \le \sigma_m < \sigma$, т.е. числовая последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ монотонно возрастает (так как $a_i > 0$) и ограничена сверху числом σ, поэтому в силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности (см. § 2.4) $\{S_n\}$ сходится, а значит сходится ряд (A) и по следствию из теоремы о монотонности предела для числовых последовательностей (см. § 2.2) его сумма $S \le \sigma$. Повторив теперь все эти рассуждения для ряда (B), мы получим, что $\sigma \le S$. Отсюда следует $\sigma = S$. **Теорема доказана.**

Очевидно, для расходящихся рядов сформулированные теоремы не справедливы.

9.2. Критерий Коши сходимости (расходимости) числового ряда. Необходимый признак сходимости. Признак сравнения

Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда). *Для того чтобы числовой ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \epsilon > 0$ *существовало* $N_\epsilon \in N$ *такое, что* $\forall n > N_\epsilon$ *и* $\forall p \in N$ *выполнялось нера-*

венство

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \epsilon.$$

Доказательство. При доказательстве воспользуемся критерием Коши сходимости числовых последовательностей (см. § 2.6). Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится или расходится вместе с числовой последовательностью $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, которая сходится тогда и только тогда, когда $\forall\epsilon > 0$ существует $N_\epsilon \in N$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$ или

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \epsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема (критерий Коши расходимости числового ряда). *Для того чтобы числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходился, необходимо и достаточно, чтобы $\exists\epsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N_{\epsilon_0} \in N$ нашлись $n > N_{\epsilon_0}$ и $p \in N$, для которых справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| \geq \epsilon_0.$$

Теорема (необходимый признак сходимости−1). *Если числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится и S — его сумма, тогда $a_n = S_n - S_{n-1}$, и отсюда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. **Теорема доказана.**

Отметим, что равенство нулю предела общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости, что иллюстрирует пример гармонического ряда.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sin\alpha i$, $\alpha \neq 0$.

Предположим, что предложенный ряд сходится, тогда в силу необходимого условия сходимости $\lim\limits_{i\to\infty} \sin\alpha i = 0$, поэтому $\lim\limits_{i\to\infty} \sin\alpha(i+1) = 0$. Но $\sin\alpha(i+1) = \sin\alpha i\cos\alpha + {}$ $+ \cos\alpha i \sin\alpha$. Переходя в этом равенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем $\lim\limits_{i\to\infty} \cos\alpha i = 0$. Переходя теперь к пределу при $i \to \infty$ в основном тригонометрическом тождестве $\sin^2\alpha i + \cos^2\alpha i = 1$, получаем равенство $0 = 1$. Полученное противоречие означает расходимость ряда.

Иногда удобно пользоваться необходимым признаком сходимости в следующей (эквивалентной) формулировке.

Теорема (необходимый признак сходимости – 2). *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, то последовательность его частичных сумм* $\{S_n\}$ *ограничена.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, тогда сходится и последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$, а значит в силу необходимого признака сходимости числовых последовательностей (см. §2.3) получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

На примере числового ряда-«мигалки» $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i$ легко убедиться, что данное условие является лишь необходимым, но не достаточным. Однако для числовых рядов с *положительными членами* справедливо следующее утверждение:

Теорема. *Если* $a_i \geq 0 \quad \forall i \in N$, *то для сходимости числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм* $\{S_n\}$ *была ограничена.*

Доказательство. Необходимость этого утверждения следует из необходимого признака сходимости – 2. Покажем его достаточность. Пусть $a_i \geq 0 \quad \forall i \in N$, тогда $S_1 \leq \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots$, т. е. числовая последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ монотонно не убывает и по условию теоремы ограничена сверху, а значит в силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности (см. § 2.4) существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т. е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится. **Теорема доказана.**

Теорема (признак сравнения в форме неравенств). *Если* $0 \leq a_i \leq b_i \quad \forall i \geq N_1$, *тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Доказательство. Будем считать, что неравенство $0 \leq a_i \leq b_i$ выполняется $\forall i \in N$ (если это не так, то, отбросив конечное число членов рядов, получим требуемое, не «испортив» сходимости или расходимости рядов), тогда

$$0 \leq S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

причем в силу условий теоремы последовательности $\{S_n\}$ и $\{s_n\}$ не убывают.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sigma$, причем $s_n \leq \sigma$, тогда $S_n \leq \sigma$ и по теореме

Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности (см. § 2.4) существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, а значит ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится, тогда, так как $S_n \geq 0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, но поскольку $S_n \leq s_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, т. е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ расходится. **Теорема доказана.**

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i + i^2}$. Очевидно $\forall i \in N$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{2^i + i^2} \leq \dfrac{1}{2^i}$, и поскольку ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i}$ является сходящимся, то сходится и исходный ряд.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^\alpha}$, $\alpha \leq 1$. Из неравенства $\dfrac{1}{i} \leq \dfrac{1}{i^\alpha}$ справедливого при всех $i \in N$ и расходимости гармонического ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i}$ получаем расходимость исходного ряда.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(1+i)}$. Из неравенства $\ln(1+i) < i$ вытекает эквивалентное ему $\dfrac{1}{i} < \dfrac{1}{\ln(1+i)}$, означающее в силу признака сравнения расходимость данного ряда.

Пример 5. Исследовать на сходимость числовой ряд

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$. Поскольку справедливо неравенство

$$a_i = \frac{1}{i^2} \le b_i = \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \quad \forall i \ge 2,$$

и

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = 2 - \frac{1}{n} \to 2,$$

то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, тогда в силу признака сравнения исходный ряд сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^\alpha}$, $\alpha \ge 2$. Из очевидного неравенства $\frac{1}{i^\alpha} \le \frac{1}{i^2}$, предыдущего примера и признака сравнения получаем сходимость данного ряда.

Иногда удобно использовать

Следствие (признак сравнения в предельной форме). *Если для членов числовых рядов* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i > 0$, *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, $b_i > 0$, *существует (конечный) предел* $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{a_i}{b_i} = k \ne 0$, *то ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Так как по условию теоремы $a_i > 0$, $b_i > 0$, то по следствию из теоремы о монотонности предела для числовых последовательностей (см. § 2.2) $k > 0$, поэтому найдутся два положительных числа k_1 и k_2 такие, что $0 < k_1 < k < k_2$. Тогда по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. § 2.2) найдется номер N_1 такой, что $\forall i > N_1$

выполняется двойное неравенство

$$k_1 < \frac{a_i}{b_i} < k_2 \iff k_1 b_i < a_i < k_2 b_i.$$

Если теперь сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, то сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_2 b_i$, а вместе с ним по признаку сравнения сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Если расходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, то расходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_1 b_i$, а вместе с ним по признаку сравнения расходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Следствие доказано.

9.3. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки Даламбера, Коши, Раабе, интегральный признак, Куммера, Бертрана, Гаусса)

Теорема (признак Даламбера). *Пусть для числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ с положительными членами $a_i > 0$ справедливо предельное равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = l$, тогда если $l < 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а если $l > 1$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = l$, тогда $\forall\epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall i > N_\epsilon$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i} - l\right| < \epsilon \quad \text{или} \quad l - \epsilon < \frac{a_{i+1}}{a_i} < l + \epsilon.$$

Пусть $l < 1$, тогда можно выбрать положительное число

$\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l + \Delta < 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} < r \quad \text{или} \quad a_{i+1} < ra_i.$$

Следовательно,

$$a_{N_\Delta+2} < ra_{N_\Delta+1},$$
$$a_{N_\Delta+3} < ra_{N_\Delta+2} < r^2 a_{N_\Delta+1},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{N_\Delta+k+1} < r^k a_{N_\Delta+1}.$$

Таким образом, начиная с $a_{N_\Delta+1}$, все члены исходного ряда меньше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r < 1$, в силу признака сравнения заданный ряд сходится.

Пусть теперь $l > 1$, тогда можно выбрать положительное число $\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l - \Delta > 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} > r \quad \text{или} \quad a_{i+1} > ra_i.$$

Следовательно,

$$a_{N_\Delta+2} > ra_{N_\Delta+1},$$
$$a_{N_\Delta+3} > ra_{N_\Delta+2} > r^2 a_{N_\Delta+1},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{N_\Delta+k+1} > r^k a_{N_\Delta+1}.$$

Таким образом, члены исходного ряда, начиная с номера $(N_\Delta + 1)$, больше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r > 1$, в силу признака сравнения заданный ряд расходится. **Теорема доказана.**

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{i!}{(i+1)!} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i+1} = 0 < 1$, т. е. ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{i+1} \cdot \frac{i}{2^i} \right) = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{2i}{i+1} = 2 > 1$, т. е. ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a^i \cdot i!}{i^i}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \left(\frac{a^{i+1} \cdot (i+1)!}{(i+1)^{i+1}} \cdot \frac{i^i}{a^i \cdot i!} \right) = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i} = \frac{a}{e}$, т. е. ряд сходится при $a < e$ и расходится при $a > e$.

Замечание 1. Естественно возникает вопрос, что можно сказать о сходимости ряда, для которого $l = 1$. В этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться. Соответствующие контрпримеры доставляют расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ и сходящийся ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$, для каждого из которых $l = 1$.

Теорема (корневой признак Коши). *Пусть для числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ с положительными членами $a_i > 0$ справедливо предельное равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{a_i} = l$, тогда если $l < 1$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а если $l > 1$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{a_i} = l$, тогда $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall i > N_\epsilon$ справедливо неравенство

$$|\sqrt[i]{a_i} - l| < \epsilon \quad \text{или} \quad l - \epsilon < \sqrt[i]{a_i} < l + \epsilon.$$

Пусть $l < 1$, тогда можно выбрать положительное число $\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l + \Delta < 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\sqrt[i]{a_i} < r \quad \text{или} \quad a_i < r^i.$$

Таким образом члены исходного ряда, начиная с номера $(N_\Delta + 1)$, меньше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r < 1$, в силу признака сравнения заданный ряд сходится.

Пусть теперь $l > 1$, тогда можно выбрать положительное число $\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l - \Delta > 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\sqrt[i]{a_i} > r \quad \text{или} \quad a_i > r^i.$$

Таким образом члены исходного ряда, начиная с номера $(N_\Delta + 1)$, больше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r > 1$, в силу признака сравнения заданный ряд расходится. **Теорема доказана.**

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2i+1}{i}\right)^i$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{\left(\frac{2i+1}{i}\right)^i} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{2i+1}{i} = 2 > 1$, т. е. ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{\frac{a^i}{i}} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{a}{\sqrt[i]{i}} = a$, т. е. ряд сходится при $a < 1$ и расходится при $a \geq 1$. (Здесь использовано предельное равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{i} = 1$, см. § 2.2, пример 2.)

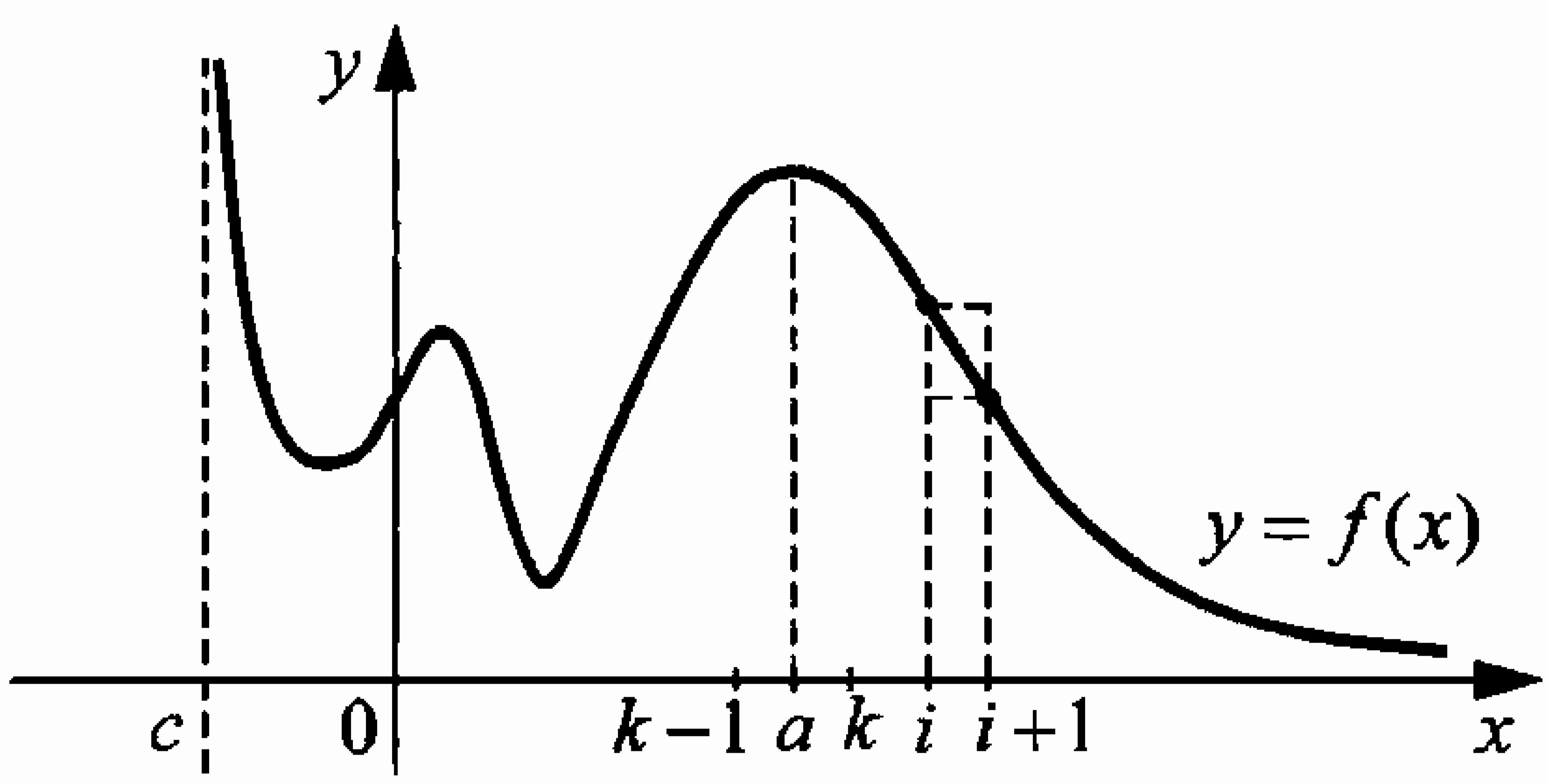
Замечание 2. Так же как и для признака Даламбера, в случае $l = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться, в чем можно убедиться на примере расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ и сходящегося ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$.

Теорема (интегральный признак Коши). *Пусть функция $f(x) \geq 0$ неотрицательна при $x \geq a$, монотонно убывает при $x \geq a$, $f(x) \in C(x \geq a)$, тогда число-*

вой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ *сходится или расходится вместе с несобственным интегралом* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Заметим, что левее точки a функция $f(x)$ может быть разрывной, неограниченно возрастать около некоторой точки $c < a$ и т. д. Пусть k наименьшее натуральное число, превосходящее или совпадающее с a, тогда при любом $i > k$ справедливо неравенство

$$f(i+1) \le \int\limits_i^{i+1} f(x)\,dx \le f(i).$$



Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится (см. § 5.12), т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Поскольку функция $f(x) \ge 0$ неотрицательна при $x \ge a$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ возрастает при $b \to \infty$ и ограничен, тогда для частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$ справедливо неравенство

$$S_n = \sum_{i=k+1}^{n} f(i) \le \sum_{i=k+1}^{n} \int\limits_{i-1}^{i} f(x)\,dx = \int\limits_k^n f(x)\,dx \le \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Поскольку члены ряда $f(i) \geq 0$, то последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает, и в силу теоремы Вейерштрасса (см. § 2.4) существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, а это означает сходимость числового ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$, который отличается от исходного ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ конечным числом слагаемых, т. е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ сходится.

Пусть теперь несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ расходится (см. § 5.12), т. е. $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = +\infty$, поскольку функция $f(x) \geq 0$ неотрицательна при $x \geq a$. Поэтому для частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$ справедливо обратное неравенство

$$S_n = \sum_{i=k+1}^{n} f(i) \geq \sum_{i=k+1}^{n} \int\limits_i^{i+1} f(x)\,dx = \int\limits_{k+1}^{n+1} f(x)\,dx.$$

Но при $n \to \infty$ $\int\limits_{k+1}^{n+1} f(x)\,dx \to \infty$, т. е. $S_n \to \infty$, что означает расходимость числового ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$, а вместе с ним расходится исходный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$. **Теорема доказана.**

Пример 6. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^\alpha}$ при $1 < \alpha < 2$. Напомним, что в примерах 3 и 6 из § 8.2 была показана сходимость заданного ряда при $\alpha \geq 2$ и расходимость при $\alpha \leq 1$. В примере 3 из § 5.12 доказана сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ при $1 < \alpha$, поэтому в силу интегрального признака Коши заданный интеграл сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^\infty \frac{1}{i\ln^\beta i}$. В примере 6 из §5.12 доказана сходимость интеграла $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^\beta}\,dx$ при $1 < \beta$ и расходимость при $\beta \le 1$, поэтому в силу интегрального признака Коши заданный ряд сходится при $1 < \beta$ и расходится при $\beta \le 1$.

Пример 8. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^\infty \frac{1}{i^\alpha\ln^\beta i}$.

При $\alpha = 1$ рассматриваемый ряд исследован в предыдущем примере 7, таким образом, при $\alpha = 1$, $\beta > 1$ ряд сходится, а при $\alpha = 1$, $\beta \le 1$ — расходится.

Пусть $\alpha < 1$, тогда для некоторого $\Delta > 0$ справедливо представление $\alpha = 1 - 2\Delta$, отсюда

$$\frac{1}{i^\alpha\ln^\beta i} = \frac{1}{i^{1-\Delta}}\cdot\frac{i^\Delta}{\ln^\beta i}.$$

Поскольку существует положительное число $K(\Delta,\beta) > 0$ такое, что $\frac{i^\Delta}{\ln^\beta i} \ge K(\Delta,\beta)$ при всех $i \ge 2$ (см. §2.7 ряд сравнения бесконечно больших), то получаем неравенство

$$\frac{1}{i^\alpha\ln^\beta i} \ge \frac{K(\Delta,\beta)}{i^{1-\Delta}}.$$

Таким образом в силу признака сравнения (в форме неравенств) заданный ряд расходится при $\alpha < 1$ и любом β.

Пусть $\alpha > 1$, тогда для некоторого $\Delta > 0$ справедливо представление $\alpha = 1 + 2\Delta$, отсюда

$$\frac{1}{i^\alpha \ln^\beta i} = \frac{1}{i^{1+\Delta}} \cdot \frac{1}{i^\Delta \ln^\beta i}.$$

Очевидно существует положительное число $L(\Delta, \beta) > 0$ такое, что $\dfrac{1}{i^\Delta \ln^\beta i} \leq L(\Delta, \beta)$ при всех $i \geq 2$ (см. § 2.7 ряд сравнения бесконечно больших), тогда

$$\frac{1}{i^\alpha \ln^\beta i} \leq \frac{L(\Delta, \beta)}{i^{1+\Delta}}.$$

Таким образом в силу признака сравнения (в форме неравенств) заданный ряд сходится при $\alpha > 1$ и любом β.

Теорема (признак Раабе). *Пусть для числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами* a_i *существует предел* $\lim\limits_{i\to\infty} i\left(1 - \dfrac{a_{i+1}}{a_i}\right) = l$, *тогда при* $1 < l$ *ряд сходится, а при* $1 > l$ *— расходится.*

Доказательство. Пусть $1 < l$ и $1 < q < l$, тогда по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. § 2.2) существует номер N_1 такой, что для всех $i > N_1$ выполняется неравенство

$$i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) > q \quad \text{или} \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} < 1 - \frac{q}{i}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств (см. § 3.5 пример 2):

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{i}\right)^s - 1}{-\frac{1}{i}} = \lim_{i\to\infty} \frac{1 - \frac{s}{i} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{i}\right) - 1}{-\frac{1}{i}} =$$

$$= \lim_{i\to\infty} (s - \mathrm{o}(1)) = s,$$

поэтому для $1 < s < q < l$ вновь по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. § 2.2) существует номер N_2 такой, что для всех $i > N_2$ выполняется неравенство

$$\frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)^s - 1}{-\frac{1}{i}} < q \quad \text{или} \quad 1 - \frac{q}{i} < \left(1 - \frac{1}{i}\right)^s = \frac{(i-1)^s}{i^s}.$$

Таким образом, для любого $i > \max(N_1, N_2)$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1 - \frac{q}{i} < \frac{(i-1)^s}{i^s} \quad \text{или} \quad a_{i+1} < \frac{(i-1)^s}{i^s} \cdot a_i.$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} a_i$, отличающийся от исходного конечным количеством слагаемых, для его общего члена справедливы следующие неравенства при любом $i > N + 1$

$$a_i < \frac{(i-2)^s}{(i-1)^s} \cdot a_{i-1} < \frac{(i-2)^s}{(i-1)^s} \cdot \frac{(i-3)^s}{(i-2)^s} \cdot a_{i-2} <$$

$$< \frac{(i-3)^s}{(i-1)^s} \cdot \frac{(i-4)^s}{(i-3)^s} \cdot a_{i-3} < \ldots < \frac{N^s}{(i-1)^s} \cdot a_{N+1}.$$

Поскольку $s > 1$ числовой ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \frac{N^s}{(i-1)^s} \cdot a_{N+1}$ сходится, а значит в силу признака сравнения сходится ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} a_i$, вместе с которым сходится и исходный ряд.

Пусть $l < 1$ тогда по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. § 2.2) существует номер N_1 такой, что для всех $i > N_1$ выполняется неравенство

$$i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) < 1 \quad \text{или} \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} > 1 - \frac{1}{i} \quad \text{или} \quad a_{i+1} > \frac{i-1}{i} \cdot a_i.$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} a_i$, для членов которого справедливы следующие неравенства при любом $i > N+1$

$$a_i > \frac{i-2}{i-1} \cdot a_{i-1} > \frac{i-2}{i-1} \cdot \frac{i-3}{i-2} \cdot a_{i-2} >$$

$$> \frac{i-3}{i-1} \cdot \frac{i-4}{i-3} \cdot a_{i-3} > \ldots > \frac{N_1}{i-1} \cdot a_{N_1+1}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=N_1+1}^{\infty} \frac{N_1}{i-1} \cdot a_{N_1+1}$ расходится, то расходится ряд $\sum\limits_{i=N_1+1}^{\infty} a_i$, а вместе с ним расходится исходный ряд. **Теорема доказана.**

Пример 9. Исследовать на сходимость числовой ряд $1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cdot \frac{1}{2i+1} \right)$. Если попытаться исследовать этот ряд с помощью признака Даламбера, то получим в пределе $l = 1$, т. е. признак неприменим. По признаку Раабе, получаем

$$\lim_{i\to\infty} i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) = \lim_{i\to\infty} \frac{6i-1}{2(2i+1)} = \frac{3}{2} > 1,$$

т. е. ряд сходится.

Замечание (к признаку Раабе). Признак Раабе можно встретить в следующей альтернативной формулировке.

Теорема (признак Раабе). *Если для числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ с положительными членами a_i существует предел $\lim\limits_{i\to\infty} i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) = q$, то при $1 < q$ ряд сходится, а при $1 > q$ — расходится.*

Покажем эквивалентность этих утверждений, причем $l = q$.

Пусть $l > 0$, тогда для любого $\epsilon > 0$ такого, что $l - \epsilon > 0$, существует номер N_1, для которого при всех $i > N_1$ справедливо неравенство

$$\left| i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) - l \right| < \epsilon$$

или

$$0 < l - \epsilon < i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) < l + \epsilon;$$

$$0 < \frac{l-\epsilon}{i} < 1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{l+\epsilon}{i};$$

$$\frac{(l-\epsilon)-i}{i} < -\frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{(l+\epsilon)-i}{i} < 0 \quad \text{при} \quad \forall i > N_2;$$

$$0 < \frac{i-(l+\epsilon)}{i} < \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{i-(l-\epsilon)}{i};$$

$$\frac{i}{i-(l+\epsilon)} > \frac{a_i}{a_{i+1}} > \frac{i}{i-(l-\epsilon)};$$

$$\frac{l+\epsilon}{i-(l+\epsilon)} > \frac{a_i}{a_{i+1}} - 1 > \frac{l-\epsilon}{i-(l-\epsilon)};$$

$$\frac{(l+\epsilon)i}{i-(l+\epsilon)} > i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) > \frac{(l-\epsilon)i}{i-(l-\epsilon)};$$

$$(l+\epsilon) + \frac{(l+\epsilon)^2}{i-(l+\epsilon)} > i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) > (l-\epsilon) + \frac{(l-\epsilon)^2}{i-(l-\epsilon)};$$

$$-2\epsilon < -\epsilon + \frac{(l-\epsilon)^2}{i-(l-\epsilon)} < i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) - l <$$

$$< \epsilon + \frac{(l+\epsilon)^2}{i-(l+\epsilon)} < 2\epsilon \quad \forall i > N_3,$$

поэтому при любом $i > \max(N_1, N_2, N_3)$

$$\left| i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) - l \right| < 2\epsilon,$$

что и означает предельное равенство

$$\lim_{i\to\infty} i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) = l = q.$$

Пусть $l < 0$, тогда для любого $\epsilon > 0$ такого, что $l + \epsilon < 0$, существует номер N_1, для которого при всех $i > N_1$ справедливо неравенство

$$\left| i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) - l \right| < \epsilon$$

или

$$l - \epsilon < i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) < l + \epsilon < 0;$$

$$\frac{l-\epsilon}{i} < 1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{l+\epsilon}{i} < 0;$$

$$\frac{(l-\epsilon) - i}{i} < -\frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{(l+\epsilon) - i}{i} < 0 \quad \forall i > N_2,$$

дальнейшие рассуждения полностью дублируют проведенные выше для случая $l > 0$.

Если $l = 0$, то, аналогично рассуждая, для любого $\epsilon > 0$ найдем номер N_1 такой, что при всех $i > N_1$ справедливо неравенство

$$\left| i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \right| < \epsilon$$

или

$$-\epsilon < i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) < \epsilon;$$

$$-\frac{\epsilon}{i} < 1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{\epsilon}{i};$$

$$-1 - \frac{\epsilon}{i} < -\frac{a_{i+1}}{a_i} < -1 + \frac{\epsilon}{i} < 0 \quad \forall i > N_2;$$

$$0 < 1 - \frac{\epsilon}{i} < \frac{a_{i+1}}{a_i} < 1 + \frac{\epsilon}{i};$$

$$\frac{i - \epsilon}{i} < \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{i + \epsilon}{i};$$

$$\frac{i}{i + \epsilon} < \frac{a_i}{a_{i+1}} < \frac{i}{i - \epsilon};$$

$$-\frac{\epsilon}{i + \epsilon} < \frac{a_i}{a_{i+1}} - 1 < \frac{\epsilon}{i - \epsilon};$$

$$-2\epsilon < -\epsilon + \frac{\epsilon^2}{i + \epsilon} = -\frac{\epsilon i}{i + \epsilon} < i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) <$$

$$< \frac{\epsilon i}{i - \epsilon} = \epsilon + \frac{\epsilon^2}{i - \epsilon} < 2\epsilon,$$

т. е.

$$\lim_{i\to\infty} i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) = 0.$$

Теорема (признак Куммера). *Пусть* $\{a_i\}$ *и* $\{c_i\}$ *— две последовательности положительных чисел.*

1. *Если существует* $\alpha > 0$ *и номер* N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $c_i - c_{i+1} \cdot \dfrac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha$, *то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится.*

2. *Если существует номер* N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $c_i - c_{i+1} \cdot \dfrac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0$ *и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_i}$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *тоже расходится.*

Доказательство. Очевидно можно принять $N = 1$, так как если бы это было не так, то, удалив N первых членов ряда, мы, не меняя характера сходимости, добились бы этого эффекта. В первом случае получаем неравенства $\forall i \in N \quad c_i \cdot a_i - c_{i+1} \cdot a_{i+1} \geq \alpha \cdot a_i$, просуммировав которые по i от 1 до n, получим для n-частичной суммы ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ оценку сверху

$$\alpha \cdot S_n \leq c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1}$$

или

$$S_n \leq \frac{c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1}}{\alpha} < \frac{c_1 \cdot a_1}{\alpha}.$$

Поскольку последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает, то по теореме Вейерштрасса (см. §2.4) $\{S_n\}$ сходится, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Если же выполнена вторая группа условий теоремы, то, переписав неравенство в виде

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \frac{c_i}{c_{i+1}} \quad \text{или} \quad a_{i+1} \geq \frac{c_i}{c_{i+1}} \cdot a_i,$$

получим для общего члена ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ следующую цепочку неравенств:

$$a_i \geq \frac{c_{i-1}}{c_i} \cdot a_{i-1} \geq \frac{c_{i-1}}{c_i} \cdot \frac{c_{i-2}}{c_{i-1}} \cdot a_{i-2} \geq \frac{c_{i-2}}{c_i} \cdot \frac{c_{i-3}}{c_{i-2}} \cdot a_{i-3} \geq$$

$$\geq \ldots \geq \frac{c_1}{c_i} \cdot a_1,$$

из которой в силу признака сравнения (в форме неравенств) получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Если в условиях доказанной теоремы положить $c_i = 1$, то условие сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ перепишется в виде

$$1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha \quad \text{или} \quad 0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \alpha = r < 1,$$

а условие расходимости

$$1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0 \quad \text{или} \quad a_{i+1} \geq a_i > 0.$$

Заметим теперь, что такое же условие сходимости мы получали при доказательстве признака Даламбера, а условие расходимости означает нарушение необходимого условия сходимости (см. § 9.2).

Замечание 2. Если в условиях доказанной теоремы положить $c_i = i - 1$, то условие сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ перепишется в виде

$$i - 1 - i \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha \quad \text{или} \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \frac{\alpha + 1}{i} = 1 - \frac{q}{i},$$

а условие расходимости —

$$i - 1 - i \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0 \quad \text{или} \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 1 - \frac{1}{i},$$

именно такие неравенства и фигурировали при доказательстве признака Раабе.

Теорема (признак Бертрана). 1. *Числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами сходится, если существует* $\alpha > 0$ *и номер* N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \dfrac{1}{i} - \dfrac{1+\alpha}{i \ln i}$.

2. *Числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами расходится, если существует номер* N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} \geq 1 - \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i \ln i}$.

Доказательство. 1. Положим в условиях теоремы Куммера $c_i = (i-1)\ln(i-1)$, тогда условие сходимости перепишется в виде

$$(i-1)\ln(i-1) - i\cdot\ln i\cdot\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha$$

или

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{-\alpha+(i-1)\ln(i-1)}{i\cdot\ln i} =$$

$$= \frac{-\frac{\alpha}{i}+\left(1-\frac{1}{i}\right)\left((\ln(i-1)-\ln i)+\ln i\right)}{\ln i} =$$

$$= \frac{-\frac{\alpha}{i}+\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(\ln\left(1-\frac{1}{i}\right)+\ln i\right)}{\ln i} =$$

$$= 1-\frac{1}{i}-\frac{\alpha}{i\ln i}+\frac{(i-1)\ln\left(1-\frac{1}{i}\right)}{i\ln i},$$

но

$$(i-1)\ln\left(1-\frac{1}{i}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{i}\right)^{i-1} \leq \ln e^{-1} = -1.$$

(см. пример 1 § 2.4). Таким образом

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1-\frac{1}{i}-\frac{\alpha}{i\ln i}-\frac{1}{i\ln i} = 1-\frac{1}{i}-\frac{\alpha+1}{i\ln i}.$$

2. Положим в условиях теоремы Куммера $c_i = (i-2)\times\times\ln(i-1)$, тогда условие расходимости перепишется в виде

$$(i-2)\ln(i-1)-(i-1)\cdot\ln i\cdot\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0$$

или

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \frac{(i-2)\ln(i-1)}{(i-1)\cdot\ln i}.$$

Если теперь доказать, что

$$1-\frac{1}{i}-\frac{1}{i\ln i} \geq \frac{(i-2)\ln(i-1)}{(i-1)\cdot\ln i},$$

то при выполнении условий теоремы по признаку Куммера получим расходимость ряда. Действительно,

$$\frac{(i-2)\ln(i-1)}{(i-1)\cdot\ln i} = \frac{i-2}{i-1}\cdot\frac{\ln(i-1)}{\ln i} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)\frac{\ln i + \ln\left(1-\frac{1}{i}\right)}{\ln i} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)\left(1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{i}\right)}{\ln i}\right) \le$$

$$\le \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{i}\right)\frac{1}{\ln i}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)\left(1 - \frac{1}{i\ln i}\right) = 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{i\ln i}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i}\cdot\frac{i\ln i - 1}{(i-1)\ln i} = 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i}\cdot\frac{1-\frac{1}{i\ln i}}{1-\frac{1}{i}} \le$$

$$\le 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i} \qquad \left(\text{так как}\quad \frac{1-\frac{1}{i\ln i}}{1-\frac{1}{i}} > 1\right).$$

Теорема доказана.

Теорема (признак Гаусса). *Если* $a_i > 0$, $\epsilon > 0$ *и* $\dfrac{a_i}{a_{i+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{i} + O\left(\dfrac{1}{i^{1+\epsilon}}\right)$, *то*

1) *числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится при* $\lambda > 1$ *и расходится при* $\lambda < 1$;

2) *если* $\lambda = 1$, *ряд сходится при* $\mu > 1$ *и расходится при* $\mu \le 1$.

Доказательство. 1. Если выполнены условия теоремы, то $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{a_i}{a_{i+1}} = \lambda$ и по признаку Даламбера получаем требуемое утверждение.

2. Если $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$, то

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = 1 + \frac{\mu}{i} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{i^{1+\epsilon}}\right) \quad \text{или} \quad i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) = \mu + \mathrm{O}\left(\frac{1}{i^{\epsilon}}\right),$$

откуда в силу признака Раабе получаем утверждение теоремы.

Если $\lambda = \mu = 1$, то при $i \to \infty$ справедливо представление

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{i} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{i^{1+\epsilon}}\right)} = 1 - \frac{1}{i} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{i^{1+\epsilon}}\right) >$$

$$> 1 - \frac{1}{i} - \frac{1}{i\ln i} \qquad \left(\text{так как } \frac{1}{i^{\epsilon}} < \frac{1}{\ln i}\right),$$

из которого по признаку Бертрана получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

9.4. Знакочередующиеся ряды

Числовой ряд называется знакочередующимся, если его члены поочередно меняют свой знак, т. е. все соседние члены ряда разных знаков. Такие ряды в общем случае принято записывать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i, \quad u_i > 0, \quad \forall i \in N.$$

Теорема (Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i$ *удовлетворяют условия* $u_1 \geq u_2 \geq$

$\geq u_3 \geq \ldots \geq u_i \geq \ldots$ *и* $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 0$, *то числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}u_i$ *сходится.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы, тогда рассмотрим $2n$-частичную сумму ряда, записав ее следующими двумя способами:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

или

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Поскольку $u_i \geq u_{i+1} > 0$, то все слагаемые в первом и втором представлениях неотрицательны, т. е. $S_{2n} > 0$ и $S_{2n} \leq u_1$, при этом $S_{2n} = S_{2n-2} + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq S_{2n-2}$. Значит числовая последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому в соответствии с теоремой Вейерштрасса $\{S_{2n}\}$ сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$.

Рассмотрим теперь числовую последовательность $(2n+1)$-частичных сумм ряда, для которой справедливо представление $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$. Но по условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$. Таким образом числовая последовательность $\{S_n\}$ сходится к числу S, и это же число является суммой ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}u_i$.

Теорема доказана.

Замечание. Для числа S справедливо представление

$$S = S_n + (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + (-1)^{n+2} u_{n+3} + \ldots =$$
$$= S_n + (-1)^n r_n.$$

Число $r_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots$, называемое *остатком ряда*, также является знакочередующимся рядом, поэтому

$0 < r_n \le u_{n+1}$ и $|S - S_n| = |r_n| \le u_{n+1}$, т. е. S_n приближает S с точностью до u_{n+1} — первого отброшенного члена.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$. Так как $\frac{1}{i} > \frac{1}{i+1}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$, то в соответствии с признаком Лейбница ряд сходится (условно), причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2$.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{i^2+k^2}\right)$. Преобразуем общий член ряда следующим образом:

$$a_i = \sin\left(\pi\sqrt{i^2+k^2}\right) = (-1)^i \sin\left(\pi\left(\sqrt{i^2+k^2} - i\right)\right) =$$

$$= (-1)^i \sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{i^2+k^2}+i}\right),$$

т. е.

$$u_i = \sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{i^2+k^2}+i}\right) \to 0+, \quad u_i \ge u_{i+1},$$

таким образом, по признаку Лейбница ряд сходится (условно, так как $|a_i| \sim \frac{1}{i}$).

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}+(-1)^i}$. Преобразуем общий член ряда

$$a_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}+(-1)^i} = (-1)^i \frac{\sqrt{i}-(-1)^i}{i-1} = (-1)^i \frac{\sqrt{i}}{i-1} - \frac{1}{i-1},$$

т. е. исходный ряд является разностью сходящегося (по признаку Лейбница) ряда и расходящегося, поэтому исходный ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt[i^2]{i}}$. Поскольку

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt[i^2]{i}} \geq \frac{1}{\sqrt[i^2]{i^2}} \to 1 \quad (\text{см. пример 2 из } \S\, 2.2),$$

то по теореме о двух ограничивающих последовательностях (см. § 2.2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[i^2]{i}} = 1 \neq 0$, т. е. нарушается необходимый признак сходимости ряда, и значит, ряд расходится.

9.5. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Достаточные признаки абсолютной сходимости

Определение. Числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$. Если же ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ называется *условно сходящимся.*

Применяя критерий Коши сходимости числового ряда, получаем критерий Коши абсолютной сходимости числового ряда.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовал номер N_ϵ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполнялось неравенство $\sum\limits_{i=n}^{n+p} |u_i| < \epsilon$.*

Теорема. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *сходится абсолютно, то он просто сходится.*

Доказательство. Рассмотрим два числовых ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$. По условию теоремы второй ряд сходится. Составим из этих рядов новый третий ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(|u_i| + u_i)$. Члены этого ряда удовлетворяют неравенству $0 \le |u_i| + u_i \le 2|u_i|$, но ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2|u_i|$ сходится, поэтому по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(|u_i| + u_i)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty}((|u_i| + u_i) - |u_i|)$ так же сходится, как разность двух сходящихся рядов. **Теорема доказана.**

Сформулируем некоторые теоремы, позволяющие судить об абсолютной сходимости числового ряда и являющиеся простыми следствиями из доказанных в § 8.3 теорем о рядах с положительными членами.

Теорема (аналог признака сравнения). *Пусть для членов числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *справедливо неравенство* $|u_i| \le a_i$, *причем числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, тогда исходный ряд сходится абсолютно, причем если* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = S$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sigma$, *то* $|S| \le \sigma$.

Доказательство. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то в силу признака сравнения числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$

сходится, т.е. данный числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится абсолютно. Рассмотрим n-частичные суммы $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ и $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, тогда $|S_n| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| \le \sigma_n \le \sigma$, поэтому по свойству монотонности предела числовой последовательности (см. § 2.2) $|S| \le \lim\limits_{n\to\infty} |S_n| \le \sigma$. **Теорема доказана.**

Теорема (аналог признака Даламбера). *Если для членов числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *существует предел* $l = \lim\limits_{i\to\infty} \left|\dfrac{u_{i+1}}{u_i}\right|$, *то при* $l < 1$ *ряд сходится абсолютно, а при* $l > 1$ *расходятся как ряд, составленный из модулей, так и исходный ряд.*

Доказательство. Действительно, при $l < 1$ по признаку Даламбера получаем сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$, что означает абсолютную сходимость исходного ряда.

Пусть $l > 1$, тогда существует номер N такой, что $\forall i > N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{u_{i+1}}{u_i}\right| > 1$ или $|u_{i+1}| > |u_i|$, т.е., начиная с номера N, члены исходного ряда по абсолютной величине возрастают, а это означает, что $\lim\limits_{i\to\infty} u_i \ne 0$. Таким образом, в силу необходимого признака сходимости исходный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ является расходящимся. **Теорема доказана.**

Теорема (аналог корневого признака Коши). *Если для членов числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *существует предел* $l = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|u_i|}$, *то при* $l < 1$ *ряд сходится абсолютно, а при* $l > 1$ *расходятся как ряд, составленный из модулей, так и исходный ряд.*

Доказательство. На основании корневого признака Коши получаем абсолютную сходимость исходного ряда.

Пусть $l > 1$, тогда существует номер N такой, что $\forall i > N$ выполняется неравенство $\sqrt[i]{|u_i|} > 1$ или $|u_i| > 1$, т. е. $\lim\limits_{i\to\infty} u_i \neq 0$, а значит исходный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ является расходящимся. **Теорема доказана.**

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно доказать расходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ в случаях, если $\lim\limits_{i\to\infty} \left|\dfrac{u_{i+1}}{u_i}\right| = \infty$ или $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|u_i|} = \infty$.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\sin(i\alpha)}{i^2}$. Так как $\left|\dfrac{\sin(i\alpha)}{i^2}\right| \leq \dfrac{1}{i^2}$, то исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2i-1)\frac{\pi}{4}}{3^i}$. Поскольку $\left|\dfrac{u_{i+1}}{u_i}\right| = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 3^i}{\sqrt{2}\cdot 3^{i+1}} = \dfrac{1}{3}$, т. е. $\lim\limits_{i\to\infty} \left|\dfrac{u_{i+1}}{u_i}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$, то ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \left(\dfrac{2i+1}{i}\right)^i$. Поскольку $\sqrt[i]{|u_i|} = \dfrac{2i+1}{i}$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|u_i|} = 2 > 1$. Таким образом, ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot i^i$. Поскольку $\sqrt[i]{|u_i|} = i$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|u_i|} = +\infty$. Таким образом, ряд расходится.

9.6. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Пусть в числовом ряде $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ имеется бесконечно много положительных и отрицательных членов. Составим из положительных чисел ряд (P) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$, а из отрицательных членов составим ряд из их абсолютных величин (Q) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится абсолютно, то ряды (P) и (Q) также сходятся, при этом сумма ряда $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ равна разности $S = p - q$, где $p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ и $q = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i$. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится условно, то оба ряда (P) и (Q) расходятся.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, тогда найдутся два натуральных числа m и k такие, что $n = m + k$ и $S_n = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i - \sum\limits_{i=1}^{k} q_i = P_m - Q_k$, где P_m и Q_k — частичные суммы рядов (P) и (Q). Составим частичную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| = P_m + Q_k$.

Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$ сходится (т. е. исходный ряд сходится абсолютно), то существует конечный предел $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, при этом $P_m < \sigma$ и $Q_k < \sigma$, $m, k \in N$. Таким образом, числовые последовательности $\{P_m\}$ и $\{Q_k\}$ будут монотонно возрастающими и ограниченными сверху, а значит, по теореме Вейерштрасса обе они сходятся, и, следовательно, сходятся числовые ряды (P) и (Q), при этом, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $S_n = P_m - Q_k$, получим $S = p - q$.

Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится условно, т.е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$ расходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| = +\infty$. Поскольку $\sigma_n = P_m + Q_k$ и $S_n = P_m - Q_k$, то $P_m = \dfrac{\sigma_n + S_n}{2}$, $Q_k = \dfrac{\sigma_n - S_n}{2}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\sigma_n \to +\infty$, $S_n \to S$, т.е. $P_m \to +\infty$, $Q_k \to +\infty$. Таким образом, ряды (P) и (Q) расходятся. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Итак, абсолютно сходящийся ряд можно рассматривать как разность двух сходящихся рядов с положительными членами, но для условно сходящегося ряда это уже неверно, что можно проиллюстрировать на примере такого (условно сходящегося) ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2$. Здесь (P) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2i-1}$ и (Q) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2i} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i}$. Ряд (Q) расходится как гармонический, а (P) расходится в силу оценки $\dfrac{1}{2i} < \dfrac{1}{2i-1}$ и признака сравнения.

Следствие. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка суммирования его членов, или другими словами, два абсолютно сходящихся ряда, отличающиеся друг от друга лишь порядком своих членов, имеют одинаковую сумму.*

Доказательство. Поскольку абсолютно сходящийся ряд представим как разность двух рядов (P) и (Q) с положительными членами, то перестановка членов в исходном ряде приводит к соответствующим перестановкам внутри рядов (P) и (Q), сумма которых при этом не меняется (см. § 9.2). **Следствие доказано.**

Замечание 2. Доказанной теоремой и следствием из нее удобно пользоваться для вычисления суммы абсолютно сходящихся рядов. Проиллюстрируем сказанное на следующем примере абсолютно сходящегося ряда:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i q^i = -\frac{q}{1+q}, \quad 0 < q < 1.$$

Здесь ряд (P) имеет вид $p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{2i} = \dfrac{q^2}{1-q^2}$, а ряд (Q) — $\tilde{q} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{2i-1} = \dfrac{q}{1-q^2}$, при этом $S = p - \tilde{q}$. К условно сходящимся рядам данная теорема неприменима. Например, в условно сходящемся ряде $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2$ осуществим перестановку его членов следующим образом:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S,$$

поскольку $S > 0$, то полученное противоречие показывает незаконность осуществленной перестановки.

Справедлива следующая теорема, принадлежащая Риману.

Теорема Римана. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *сходится условно, то можно так переставить его члены, чтобы* *вновь полученный ряд имел любую наперед заданную сумму, можно также добиться того, чтобы новый ряд оказался расходящимся.*

Доказательство. Пусть числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится условно, (P) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ — ряд из его положительных членов, (Q) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i$ — ряд из абсолютных величин отрицательных членов, $M > 0$ — некоторое положительное число.

Возьмем в ряде (P) столько первых k членов, чтобы их сумма превзошла M, однако сумма первых $k-1$ членов не превосходила бы M (это всегда можно сделать, так как для условно сходящихся рядов оба ряда (P) и (Q) расходятся):

$$p_1 + \ldots + p_{k-1} \le M < p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k.$$

Теперь в ряде (Q) выберем столько первых m слагаемых, чтобы $p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m < M$, однако $p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_{m-1} \ge M$, т. е.

$$p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m < M \le p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_{m-1}.$$

Теперь вновь в ряде (P) выберем столько l следующих (после k) слагаемых, чтобы

$$p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l-1} \le M <$$
$$< p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l}.$$

Далее вновь возьмем столько r следующих (после m) слагаемых из ряда (Q), чтобы выполнялось неравенство

$$p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l} - q_{m+1} - \ldots - q_{m+r} <$$
$$< M \le p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l} -$$
$$- q_{m+1} - \ldots - q_{m+r-1}$$

и т. д. Будем брать из рядов (P) и (Q) члены, заботясь лишь о том, чтобы: а) не употреблять члены рядов дважды; б) брать на каждом шаге столько новых членов, чтобы получить требуемые неравенства, но не более.

Построенный таким образом ряд сходится и именно к числу M. Действительно, обозначим через σ_n частичную сумму построенного ряда, тогда разность $\sigma_n - M$ бесконечное число раз меняет свой знак, при этом если $\sigma_n - M > 0$, т. е. $\sigma_n > M$, тогда для σ_n имеем представление

$$\sigma_n = \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots + \sum^{(k)} p_i - \sum q_i =$$

$$= \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots + \tilde{\sum}^{(k)} p_i + \tilde{p}_i -$$

$$- \sum q_i \leq M + \tilde{p}_i - \sum q_i,$$

здесь $\tilde{p}_i$ — последнее слагаемое в k-м блоке, таким образом $0 < \sigma_n - M \leq \tilde{p}_i$.

Если же $\sigma_n - M < 0$, т. е. $\sigma_n < M$, тогда для σ_n имеем иное представление

$$\sigma_n = \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots - \sum^{(k)} q_i + \sum p_i =$$

$$= \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots - \tilde{\sum}^{(k)} q_i - \tilde{q}_i + \sum p_i \geq$$

$$\geq M - \tilde{q}_i + \sum p_i,$$

здесь $\tilde{q}_i$ — последнее слагаемое в k-м блоке, таким образом $0 > \sigma_n - M \geq -\tilde{q}_i + \sum p_i > \tilde{q}_i$.

Поскольку исходный числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится (условно), то в силу необходимого условия сходимости $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 0$

и поскольку $\{\tilde{p}_i\}$ и $\{\tilde{q}_i\}$ являются подпоследовательностями для $\{\tilde{u}_i\}$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \tilde{p}_i = \lim\limits_{i\to\infty} \tilde{q}_i = 0$. Отсюда и из полученных выше двойных неравенств следует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = M$.

Если же $M = +\infty$, то достаточно осуществить такую перестановку $\sum^{(1)} p_i > 1$, затем $\sum^{(1)} p_i - q_1$, далее $\sum^{(1)} p_i - q_1 + \sum^{(2)} p_i > 2$, после этого $\sum^{(1)} p_i - q_1 + \sum^{(2)} p_i - q_2$, теперь $\sum^{(1)} p_i - q_1 + \sum^{(2)} p_i - q_2 + \sum^{(3)} p_i > 3$ и т. д. Очевидно, что при подобной перегруппировке можно указать такую последовательность n_i, чтобы соответствующие частичные суммы удовлетворяли неравенствам $\sigma_{n_i} > n_i$, т. е. последовательность $\{\sigma_{n_i}\}$ неограниченно возрастает, а поэтому и не стремится ни к какому конечному пределу. **Теорема доказана.**

Теорема (арифметические операции над рядами). *Если два числовых ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i$ *сходятся абсолютно, то числовые ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i)$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i$, *где* $w_i = u_1 v_i + u_2 v_{i-1} + u_3 v_{i-2} + \ldots + u_i v_1$, *также являются абсолютно сходящимися.*

9.7. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Дирихле и Абеля

Лемма (неравенство Абеля). *Пусть для числовых последовательностей* $\{a_i\}$ *и* $\{b_i\}$ *выполнены следующие условия:*

а) *последовательность* $\{a_i\}$ *монотонна;*

б) *последовательность частичных сумм* $B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ *ограничена (т. е.* $|B_n| \le B$), *тогда*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le B(|a_1| + 2|a_n|).$$

Доказательство. Предварительно рассмотрим следующее *преобразование Абеля*:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n =$$

$$= a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + (a_3 - a_4)B_3 + \ldots +$$

$$+(a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})B_i + a_n B_n.$$

Теперь приступим к непосредственному доказательству неравенства Абеля

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}||B_i| + |a_n||B_n| \le$$

$$\le B\left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n|\right).$$

Если последовательность $\{a_i\}$ не возрастающая ($a_i \ge a_{i+1}$, $i \in N$), то

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n| = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \ldots +$$

$$+(a_{n-1} - a_n) + |a_n| = (a_1 - a_n) + |a_n| = |a_1 - a_n| + |a_n|.$$

Если последовательность $\{a_i\}$ не убывающая ($a_i \le a_{i+1}$, $i \in N$), то

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n| = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots +$$

$$+(a_n - a_{n-1}) + |a_n| = (a_n - a_1) + |a_n| = |a_1 - a_n| + |a_n|.$$

Таким образом,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \le B(|a_1| + 2|a_n|).$$

Лемма доказана.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть для числового ряда вида* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *выполнены следующие условия:*

а) *последовательность* $\{a_i\}$ *монотонно стремится к нулю;*

б) *последовательность частичных сумм* $B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ *ограничена (т. е.* $|B_n| \le B$*),*

тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *сходится.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Коши сходимости числовых рядов. Для этого возьмем неравенство Абеля в следующей оценке:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| \le B(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|).$$

В силу условия а) теоремы $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_n| < \dfrac{\epsilon}{3B}$, поэтому $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| < B\left(\frac{\epsilon}{3B} + 2\frac{\epsilon}{3B}\right) = \epsilon,$$

которая и означает (согласно критерию Коши) сходимость числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$. **Теорема доказана.**

Теорема (признак Абеля). *Пусть для числового ряда вида* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *выполнены следующие условия:*

а) *последовательность* $\{a_i\}$ *монотонна и ограничена (т. е.* $|a_n| \le M$*);*

б) *ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходится,*

тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *сходится.*

Доказательство. Для доказательства вновь воспользуемся критерием Коши сходимости числовых рядов. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, то $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right| < \dfrac{\epsilon}{3M}$, т. е. числовая последовательность $B_p = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i$ ограничена. Отсюда с помощью неравенства Абеля получаем оценку

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| < \frac{\epsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \le \frac{\epsilon}{3M}(M + 2M) = \epsilon,$$

которая и означает (согласно критерию Коши) сходимость числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$. **Теорема доказана.**

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \sin 2i$. Представим общий член этого ряда в виде произведения множителей $a_i = \sum\limits_{k=1}^{i} \dfrac{1}{k!}$ и $b_i = \dfrac{\sin 2i}{\sqrt[5]{i}}$. Последовательность $\{a_i\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху $a_i < e$. Числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin 2i}{\sqrt[5]{i}}$ сходится по признаку Дирихле, поскольку его общий член представим в виде произведения множителей $\tilde{a}_i = \frac{1}{\sqrt[5]{i}}$ и $\tilde{b}_i = \sin 2i$, первый из которых монотонно стремится к нулю, а числовой ряд с общим членом $\tilde{b}_i = \sin 2i$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм $|B_n| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} \sin 2i\right| \leq \frac{1}{\sin 1}$, что следует из следующей формулы:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha i = \frac{\sin\left(\alpha\frac{n+1}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0.$$

Таким образом, в силу признака Абеля заданный ряд сходится, но не абсолютно. Действительно, справедлива следующая оценка снизу:

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \sin 2i\right| = \frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} |\sin 2i| \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \sin^2 2i =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \cdot \frac{1 - \cos 4i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} - \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \cos 4i.$$

Поскольку ряд с общим членом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \sin 4i$ сходится по признаку Дирихле, а ряд с общим членом $\frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}}$ расходится, что следует из оценки $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \geq \dfrac{1}{\sqrt[5]{i}}$, то исходный ряд сходится условно.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{i+1}}\left(1+\dfrac{2}{i}\right)^i$. Представим общий член этого ряда в виде произведения множителей $a_i = \left(1+\dfrac{2}{i}\right)^i$ и $b_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{i+1}}$. Последовательность $\{a_i\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху $a_i < e^2$. Числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{i+1}}$ сходится по признаку Дирихле, поскольку его общий член представим в виде произведения множителей $\tilde{a}_i = \dfrac{1}{\sqrt{i+1}}$ и $\tilde{b}_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}$, первый из которых монотонно стремится к нулю, а числовой ряд с общим членом $\tilde{b}_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} = (-1)^{1+2+\ldots+(i-1)}$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм, что проверяется непосредственно. Таким образом, в силу признака Абеля заданный ряд сходится. Условная сходимость ряда следует из очевидной оценки

$$\left|(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{i+1}}\left(1+\frac{2}{i}\right)^i\right| = \frac{1}{\sqrt{i+1}}\left(1+\frac{2}{i}\right)^i \geq \frac{3}{\sqrt{i+1}}.$$

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i\dfrac{\sin^2 i}{i}$. Представим общий член ряда в следующем виде:

$$u_i = (-1)^i\frac{\sin^2 i}{i} = (-1)^i\frac{1-\cos 2i}{2i} = \frac{(-1)^i}{2i} - \frac{(-1)^i\cos 2i}{2i}.$$

Числовой ряд с общим членом $\dfrac{(-1)^i}{2i}$ сходится по признаку Лейбница, а общий член другого ряда представим в виде произведения множителей $a_i = \dfrac{1}{2i}$, монотонно стремящегося к нулю, и $b_i = (-1)^i \cos 2i$, имеющего ограниченную последовательность частичных сумм, что следует из оценки

$$|B_n| = \left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \cos 2i\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\cos 1}((-1)^n \cos(2n+1) - \cos 1)\right| \le \frac{1+\cos 1}{2\cos 1}.$$

Таким образом, числовой ряд с общим членом $\dfrac{(-1)^i \cos 2i}{2i}$ сходится по признаку Дирихле, а вместе с ним сходится и заданный ряд. Условная сходимость ряда вытекает из очевидного представления

$$|u_i| = \frac{\sin^2 i}{i} = \frac{1}{2i} - \frac{\cos 2i}{2i},$$

в котором первый ряд расходится, а второй сходится по признаку Дирихле.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 i} \cos \frac{\pi i^2}{i+1}$. Преобразуем общий член ряда следующим образом:

$$u_i = \frac{1}{\ln^2 i} \cdot \cos \frac{\pi i^2}{i+1} = \frac{1}{\ln^2 i} \cdot \cos \frac{\pi(i^2-1)+\pi}{i+1} =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 i} \cdot \cos\left(\pi(i-1) + \frac{\pi}{i+1}\right) = \frac{(-1)^{i-1}}{\ln^2 i} \cdot \cos \frac{\pi}{i+1}.$$

Но числовой ряд с общим членом $\dfrac{(-1)^{i-1}}{\ln^2 i}$ сходится по признаку Лейбница, а числовая последовательность $\cos\dfrac{\pi}{i+1}$ монотонна и ограничена, следовательно, данный ряд сходится по признаку Абеля. Но поскольку $|u_i| \sim \dfrac{1}{\ln^2 i}$, данный ряд сходится условно.

10. Функциональные последовательности и ряды

10.1. Понятие функциональной последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Пусть $\forall n \in N$ определена некоторая функция $f_n(x)$, где $x \in E \subset R$. Зафиксируем некоторое значение $x_0 \in E$, тогда индуцируется соответствующая числовая последовательность $y_n = f_n(x_0)$. Для каждой такой числовой последовательности можно говорить о ее сходимости или расходимости при $n \to \infty$.

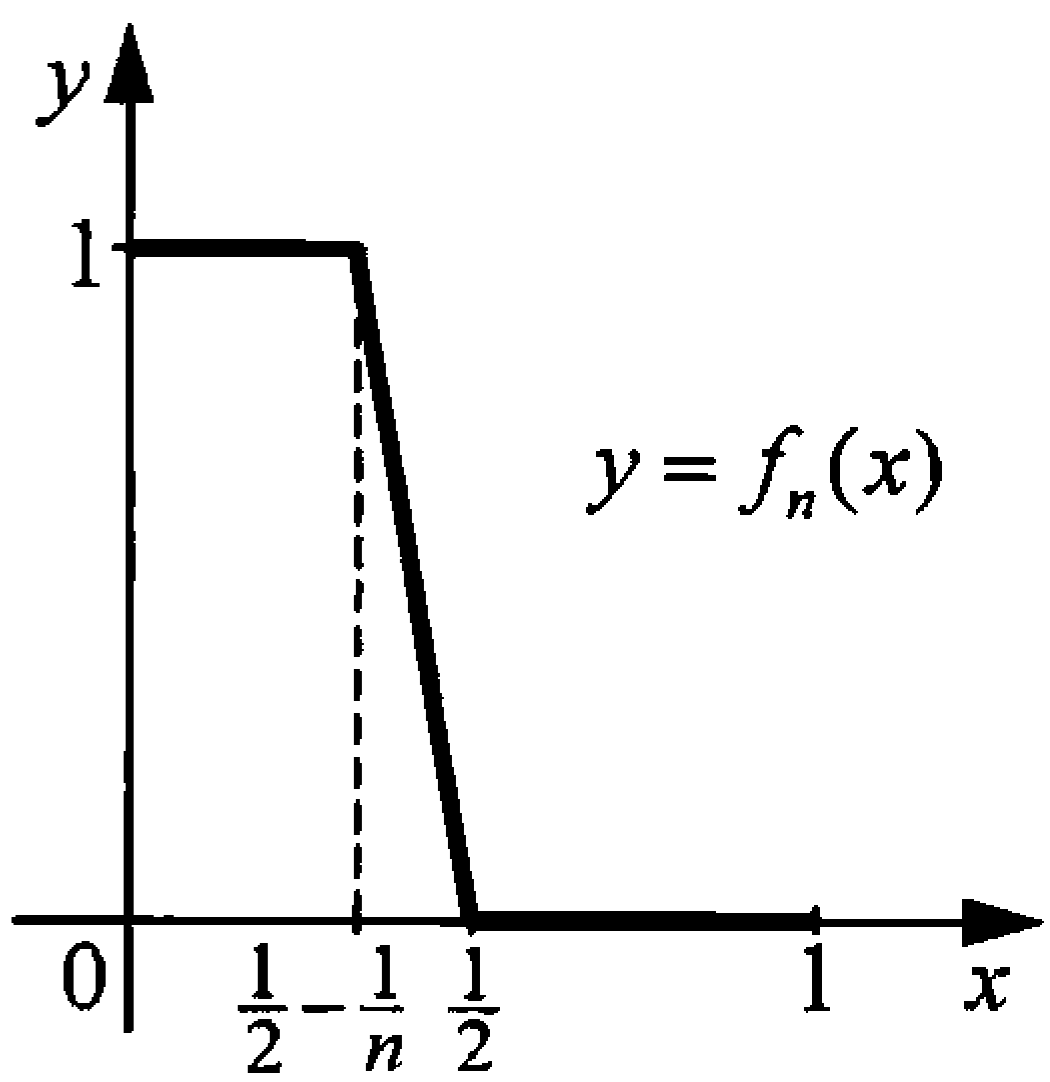
Определение. Если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ называют *сходящейся в точке* x_0, иначе *расходящейся*. Если для любой точки $x_0 \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ называют *сходящейся на множестве* E. Такая сходимость называется *поточечной*.

Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится поточечно на множестве E, то для любого $x \in E$ определено (единственное!!!) число $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, т. е. на E задана некоторая новая функция $f : x \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, эту функцию $f(x)$ называют *поточечным пределом функциональной последовательности* $\{f_n(x)\}$, обозначают этот тип сходимости следующим образом: $f_n(x) \to f(x)$ при $x \in E$. Заметим, что при работе с поточечно сходящимися функциональными последовательностями наречие «поточечно», как правило, не употребляется.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0; 1]$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0; \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right), \\ n\left(\dfrac{1}{2} - x\right), & x \in \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{2}\right), \\ 0, & x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$



Непосредственно по определению находим

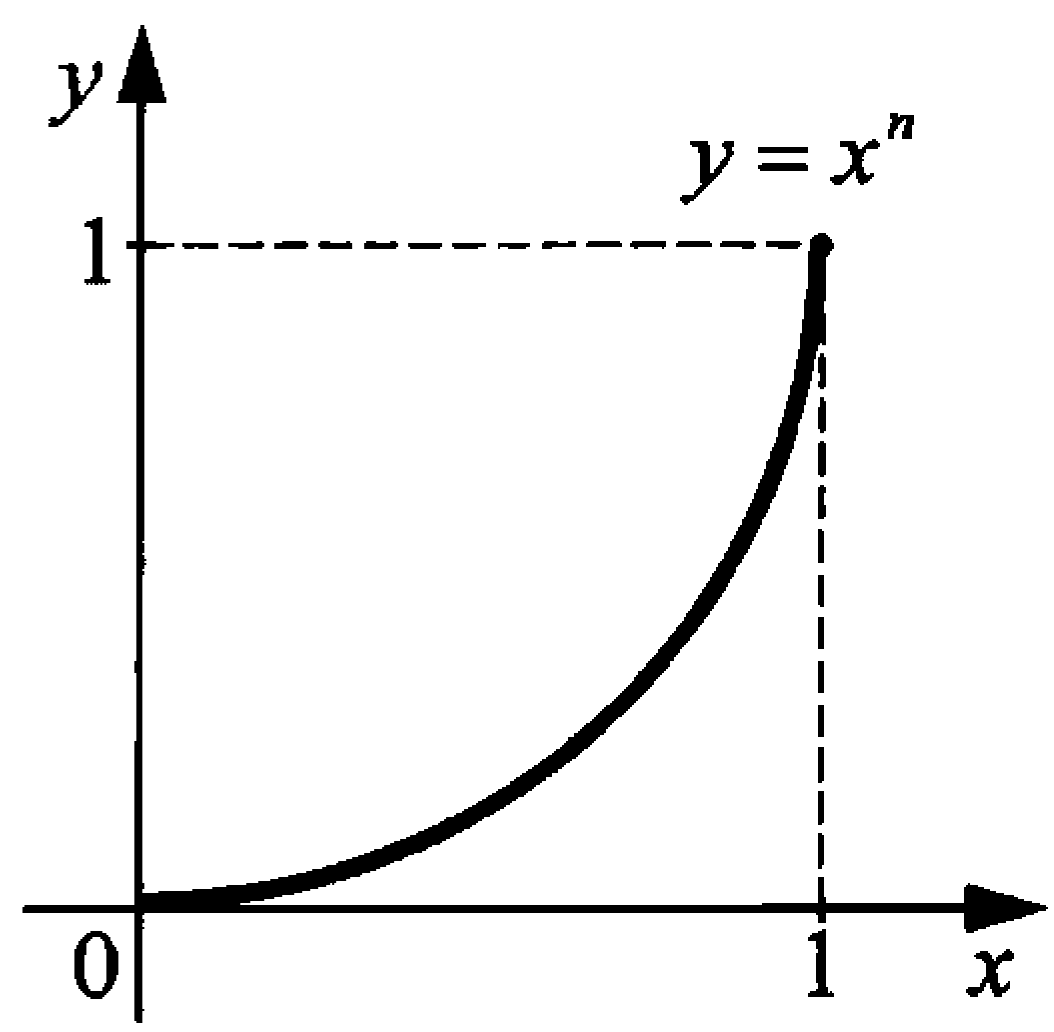
$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right), \\ 0, & x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

Заметим, что в этом примере все функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$, а предельная функция $f(x)$ терпит разрыв первого рода во внутренней точке этого отрезка $x = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = x^n$. Непосредственно по определению находим

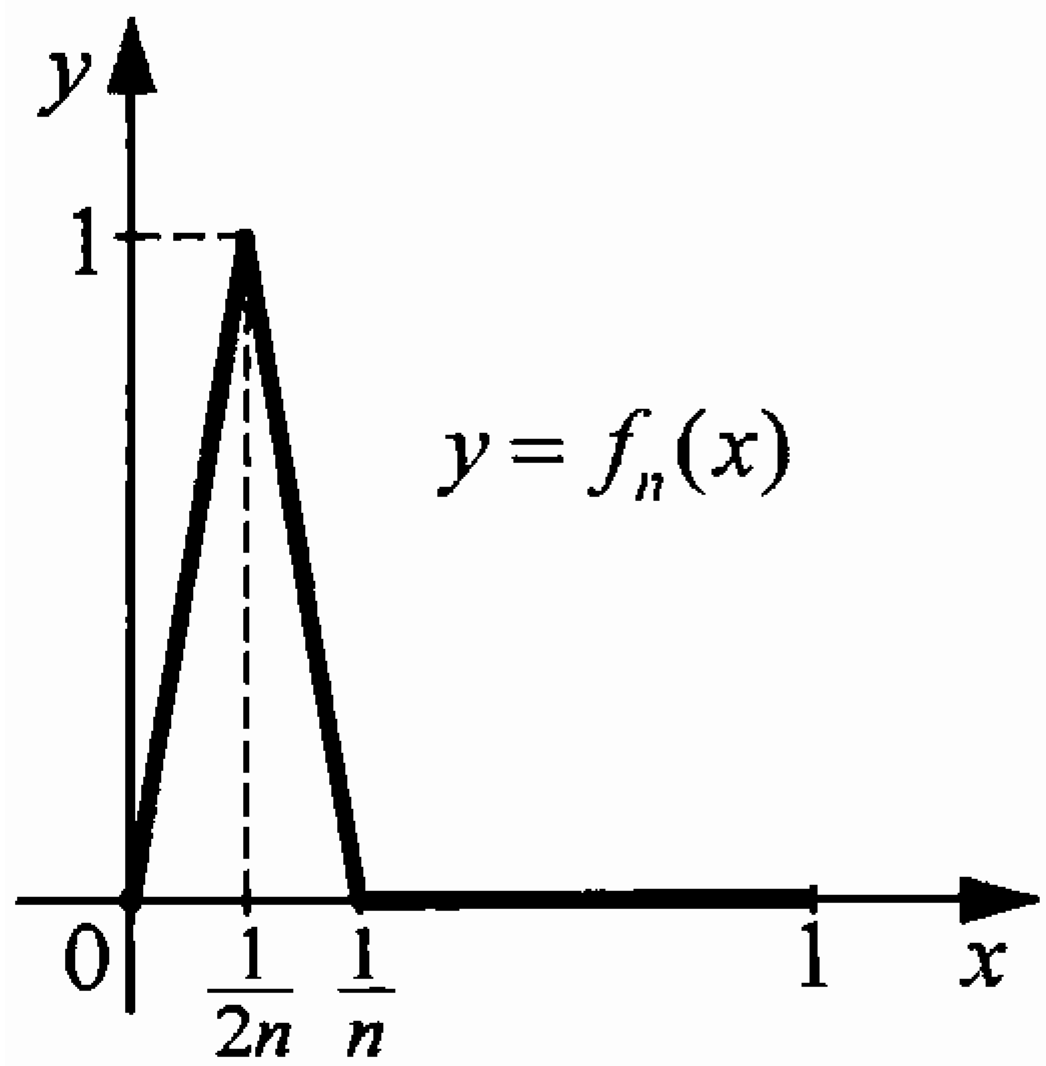
$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Заметим, что, как и в предыдущем примере, здесь все функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$, а предельная функция $f(x)$ терпит разрыв первого рода на правом конце отрезка $x = 1$.



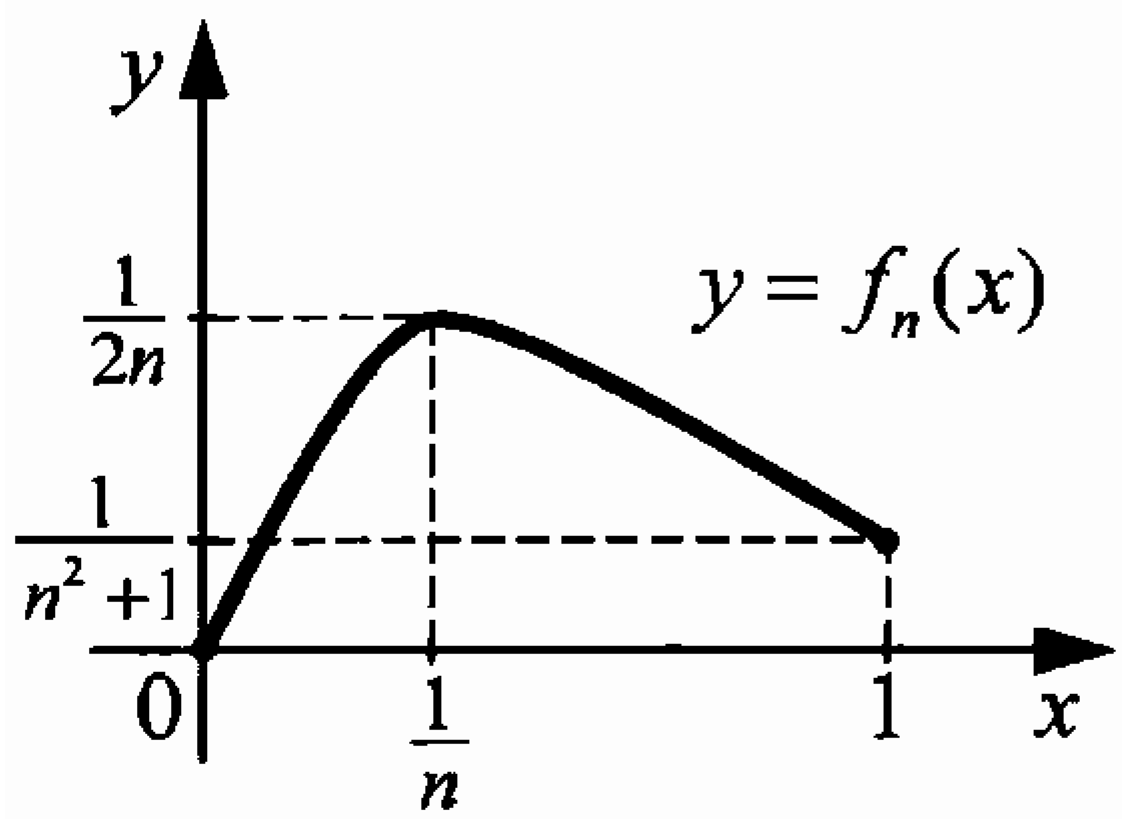
Пример 3 (бегущий горб). Исследовать на сходимость на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in \left[0; \dfrac{1}{2n}\right); \\ 2(1 - nx), & x \in \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right); \\ 0, & x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$



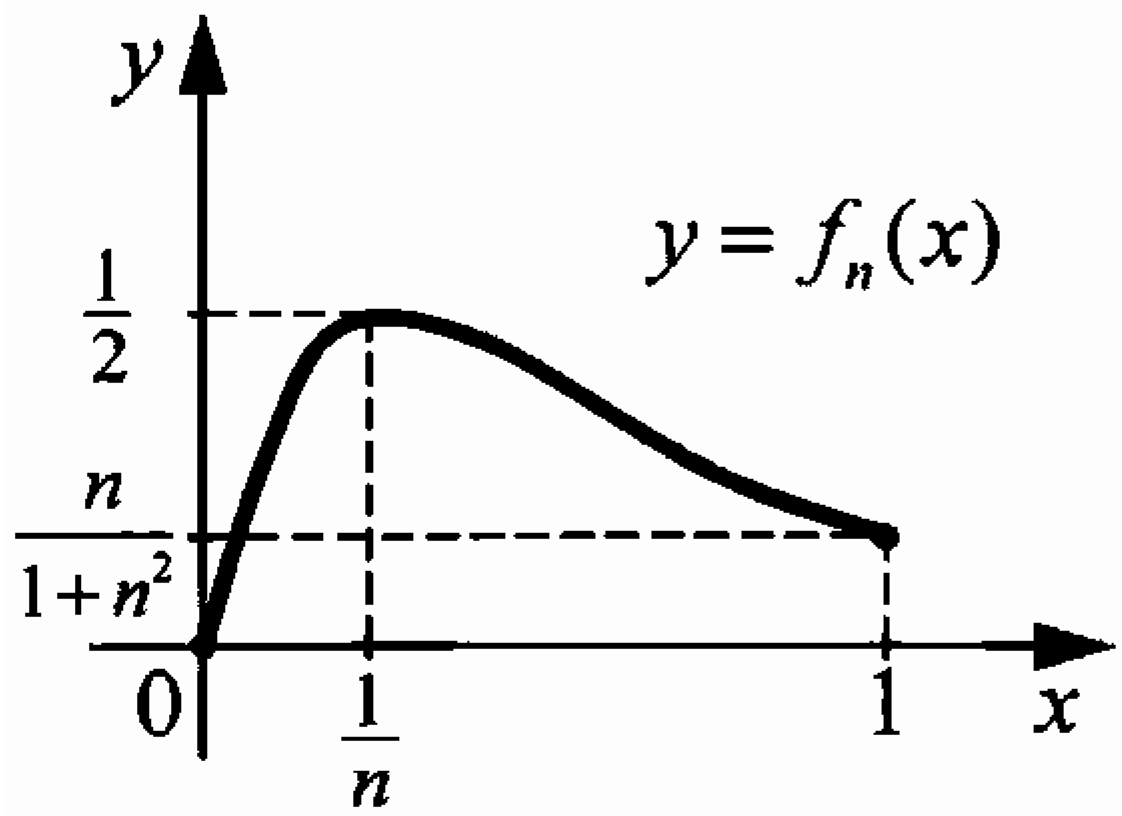
Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере как все функции $f_n(x)$, так и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$.

Пример 4. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0; 1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$.



Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$.

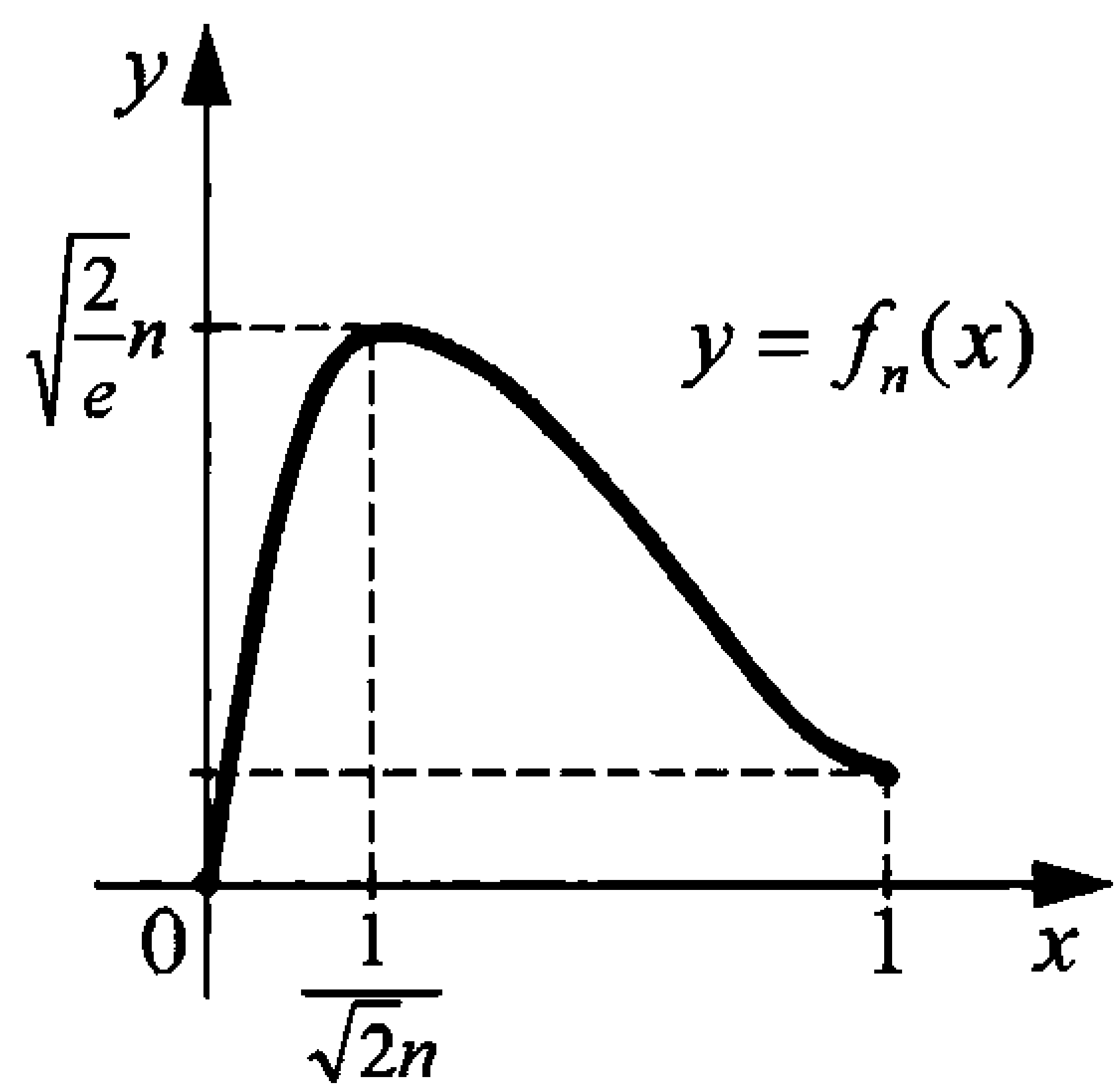
Пример 5. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0; 1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$.



Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$.

Пример 6. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$.

Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$.



Пример 7. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$.

Пример 8 (функция Дирихле). Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}$.

Если x — иррациональное число, то $n!x$ — не целое число, поэтому $|\cos(n!\pi x)| < 1$, тогда $f_n(x) = 0$.

Если же $x = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in Z$, — рациональное число, то $n!x$ — целое число при $n \geq q$, поэтому $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$, тогда $f_n(x) = 1$. Таким образом,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x - \text{иррац.}, \\ 1, & x - \text{рац.} \end{array} \right\} = D(x).$$

Итак, доказано, что функция Дирихле является двойным поточечным пределом функциональной последовательности $g_{n,m}(x) = (\cos(n!\pi x))^{2m}$. В этом примере все функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$, а предельная функция $f(x) = D(x)$ разрывна в каждой точке отрезка $[0; 1]$ (все разрывы второго рода).

Из рассмотренных здесь примеров видно, что при поточечном предельном переходе можно получить в пределе функцию $f(x)$ из другого класса по отношению к членам последовательности $f_n(x)$ (см. примеры 1, 2, 8) или из того же класса (см. примеры 3–7), т. е. некоторые свойства членов последовательности $f_n(x)$ утрачиваются, а это является существенным недостатком поточечной сходимости. Поэтому возникает необходимость в ином типе сходимости, к изложению которого далее и переходим.

Пусть $f_n(x) \to f(x)$ при $x \in E$, в соответствии с определением поточечной сходимости функциональных последовательностей это означает, что для любого $x \in E$ и для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon, x)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon, x)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Если ввести в рассмотрение величину $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$, то определение поточечной сходимости можно переформулировать следующим образом:

$$(f_n(x) \to f(x) \text{ при } x \in E) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in E,\ \forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon, x)$$
$$\text{такой, что } \forall n > N(\epsilon, x) \quad |r_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

В определении поточечной сходимости «малость» величины $r_n(x)$, вообще говоря, *разная для разных* $x \in E$. Скорректируем теперь это определение следующим образом: потребуем «малости» величины $r_n(x)$ *одинаковой для всех* $x \in E$, т. е.

$$(\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \text{ такой, что } \forall n > N(\epsilon),\ \forall x \in E\ \ |r_n(x)| < \epsilon).$$

Поскольку здесь требуется «малость» величины $|r_n(x)| < \epsilon$ $\forall x \in E$, то для ее выполнения достаточно потребовать от величины $R_n = \sup\limits_E |r_n(x)|$ удовлетворения такому же неравенству. Очевидно R_n есть наибольшее отклонение значений функции $f_n(x)$ от значений функции $f(x)$ на множестве E. Таким образом мы получили новое понятие *равномерной сходимости*.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ *на множестве* E, если $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, иначе говоря, $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N(\epsilon)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon)$, $\forall x \in E \;\; |r_n(x)| < \epsilon$.

В этом определении весьма существенно то, что номер $N(\epsilon)$ *зависит только* от ϵ и *не зависит* от $x \in E$, т. е. требуется, чтобы $\forall \epsilon > 0$ нашелся «универсальный» номер $N(\epsilon)$, начиная с которого, неравенство $|r_n(x)| < \epsilon$ было справедливо сразу *для всех* точек $x \in E$.

Равномерную сходимость принято обозначать $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Очевидно из равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E следует равномерная сходимость этой же последовательности на любом другом множестве $E_1 \subset E$.

Исследуем теперь на равномерную сходимость функциональные последовательности, рассмотренные выше в примерах 1–8.

Примеры 1, 2, 3. В первых трех примерах $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$, т. е. сходимость в этих случаях неравномерная.

Пример 4. В этом случае $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| =$
$= \max\limits_{[0;1]} \left(\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right) = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n} \to 0$, т. е. здесь сходимость равномерная, или $\dfrac{x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ на $[0;1]$.

Пример 5. В этом примере $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{[0;1]} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0$, т. е. здесь сходимость неравномерная.

Пример 6. В этом примере $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{[0;1]} \left(2n^2xe^{-n^2x^2}\right) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}n \to \infty$, т. е. здесь сходимость неравномерная.

Пример 7. В этом примере $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{[0;1]} \left(x^n - x^{2n}\right) = f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \not\to 0$, т. е. здесь сходимость неравномерная.

Пример 8. В этом примере $r_n \equiv 0$, т. е. $R_n = 0$, а значит сходимость равномерная, или $\lim\limits_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} \rightrightarrows D(x)$ на $[0;1]$ (на самом деле на R.)

Приведем строгое определение неравномерной сходимости.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *неравномерно сходится* к функции $f(x)$ *на множестве* E, если $R_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, иначе говоря, $\exists\epsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N(\epsilon)$ найдется $n > N(\epsilon)$ и найдется $x_n \in E$ такие, что $|r_n(x_n)| \geq \epsilon_0$.

Применительно к рассмотренным выше неравномерно сходящимся последовательностям такой выбор можно осуществить, например, как предложено в следующей таблице:

Пример 1	$\epsilon_0 = \frac{1}{2}$	$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{1}{2}$
Пример 2	$\epsilon_0 = \frac{1}{4}$	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = {}$ $= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$
Пример 3	$\epsilon_0 = \frac{1}{2}$	$x_n = \frac{1}{2n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = 1$
Пример 5	$\epsilon_0 = \frac{1}{4}$	$x_n = \frac{1}{n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{1}{2}$
Пример 6	$\epsilon_0 = 3$	$x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = {}$ $= \sqrt{\frac{2}{e}n}$
Пример 7	$\epsilon_0 = \frac{1}{4}$	$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{1}{4}$

Замечание 1. Отметим, что если в примерах 1–3, 5–7 «вырезать» из множества $[0; 1]$ вместе с некоторой окрестностью точки, в которых нарушается равномерная сходимость, то на оставшемся множестве сходимость будет уже равномерной.

Замечание 2. Очевидно из равномерной сходимости следует поточечная, но не наоборот, в чем мы уже убедились на примерах 1–3, 5–7.

Теорема (критерий Коши). *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве E тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого номера $n > N(\epsilon)$, любого натурального $p \in N$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве E, тогда в соответствии с определением равномерной сходимости функциональных последовательностей $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon)$ и $\forall x \in E$ выполняется неравенство $|r_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$, которое очевидно будет выполняться для любой функции с номером $n + p$, $\forall p \in N$, т.е. $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Отсюда

$\forall n > N(\epsilon)$ получаем при любом $p \in N$ и любом $x \in E$ неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Достаточность. Пусть для любого $\epsilon > 0$ существует натуральное $N(\epsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\epsilon)$, любого натурального $p \in N$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon. \qquad (*)$$

Это означает, что при любом фиксированном $x_0 \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши сходимости числовых последовательностей (см. § 2.6), т. е. $\{f_n(x_0)\}$ — сходящаяся числовая последовательность при любом $x_0 \in E$. Тем самым задана новая функция $f(x)$ по следующему правилу (которое мы выше уже видели): $f : x_0 \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Если теперь зафиксировать произвольное $n > N(\epsilon)$ и произвольную точку $x \in E$, а затем перейти к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве $(*)$, то по теореме о монотонности предела для сходящихся числовых последовательностей (см. § 2.2) получим

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Итак, для любого $\epsilon > 0$ существует натуральное $N(\epsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\epsilon)$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, означающее равномерную сходимость $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве E. **Теорема доказана.**

10.2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей

Теорема (о перестановке пределов). *Если* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *и* $f_n(x) \in C[a;b]$ $\forall n \in N$, *тогда* $f(x) \in C[a;b]$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \overset{!!!}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Доказательство. Для доказательства непрерывности предельной функции $f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in [a;b]$ воспользуемся определением непрерывности функции на языке приращений (см. § 3.6), т. е. покажем, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0$ или в развернутом виде $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что $\forall\, 0 < |\Delta x| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Из условия теоремы $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$ следует $\forall\epsilon > 0$ существует натуральное $N(\epsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\epsilon)$ и для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Поскольку $f_n(x) \in C[a;b]$ $\forall n \in N$, то по теореме Кантора (см. § 3.8) $f_n(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$, т. е. $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta_n > 0$ такое, что $\forall\, 0 < |\Delta x| < \delta_n$ выполняется неравенство $|f_n(x_0+\Delta x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Оценим разность $(f(x_0+\Delta x) - f(x_0))$ по модулю следующим образом:

$$|f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| \le |f(x_0+\Delta x) - f_n(x_0+\Delta x)| +$$

$$+ |f_n(x_0+\Delta x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

тогда для любого номера $n > N(\epsilon)$ и $\forall 0 < |\Delta x| < \delta_n$ выполняется неравенство

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

означающее непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Теорема о перестановке пределов дает достаточные условия непрерывности предельной функции. Примеры 3, 5, 6 и 7 предыдущего параграфа показывают, что это условие (непрерывность предельной функции) не является необходимым, т. е. из непрерывности предельной (в смысле поточечной сходимости) функции для функциональной последовательности непрерывных функций не следует равномерная сходимость самой последовательности. Однако если ввести некоторые дополнительные условия, то возможно обращение доказанной теоремы. А именно, справедлива следующая

Теорема Дини. *Пусть для функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in [a;b]$, выполнены следующие условия:*

а) $f_n(x) \in C[a;b]$ $\forall n \in N$;

б) $\forall x_0 \in [a;b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *является монотонно убывающей;*

в) $f_n(x) \to f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *(поточечно);*

г) $f(x) \in C[a;b]$,

тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, тогда $g_n(x) \in C[a;b]$, $g_n(x) \to 0$ поточечно и $g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \geq 0$ (так как $\{f_n(x)\}$ является монотонно убывающей $\forall x \in [a;b]$).

Пусть $\epsilon > 0$ произвольное, тогда $\forall x \in [a;b]$ $\exists N(\epsilon, x)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon, x)$ выполняется неравенство $0 \leq$

$\leq g_n(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$. В силу $g_n(x) \in C[a;b]$ и монотонности функциональной последовательности $\{g_n(x_0)\}$ по свойству сохранения знака для непрерывных функций (см. § 3.6) существует окрестность точки $x \in J(x) \subset [a;b]$ такая, что $\forall n > N(\epsilon, x)$ справедливо неравенство $0 \leq g_n(x) \leq \epsilon$ (для a и b $J(x)$ — односторонние интервалы). Но отрезок $[a;b]$ — компактное множество, а семейство интервалов $\{J(x)\}$, $x \in [a;b]$, образует его открытое покрытие. В силу леммы Бореля (см. § 3.9) из этого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т. е. существует конечное множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ таких, что $[a;b] \subset J(x_1) \cup \cup J(x_2) \cup \ldots \cup J(x_m)$. Пусть $N = \max(N(\epsilon, x_1), N(\epsilon, x_2), \ldots, N(\epsilon, x_m))$, тогда $\forall n > N$ и $\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство $0 \leq g_n(x) \leq \epsilon$, означающее, что $g_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[a;b]$ или $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. **Теорема доказана.**

Замечание 2. Свойство компактности области определения функций является весьма существенным, что показывают следующие контрпримеры. Рассмотрим пару функциональных последовательностей с «прилипанием» $\left\{f_n(x) = \frac{x^k}{n}\right\}$, $k \in N$, $x \in [0;+\infty)$ и $\left\{f_n(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{n}\right\}$, $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, для каждой из которых выполнены все условия теоремы Дини (кроме компактности области определения), $f(x) \equiv 0$, однако равномерной сходимости нет, поскольку $r_n(x) = f_n(x)$ и $R_n = \sup r_n(x) = +\infty$, т. е. $R_n \not\to 0$.

Теорема (интегрирование равномерно сходящихся функциональных последовательностей). *Пусть для функциональной последовательности* $\{f_n(x)\}$, $x \in [a;b]$, *выполнены следующие условия:*

а) $f_n(x) \in C[a;b]$ $\forall n \in N$;

б) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a;b]$,

тогда

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{или}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Примечание. Здесь в левой части равенства стоит предел числовой последовательности, а в правой — равномерный предел функциональной последовательности.

Доказательство. Так как $f_n(x) \in C[a;b]$ $\forall n \in N$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, то по теореме о перестановке пределов $f(x) \in C[a;b]$, поэтому существуют римановские интегралы (см. § 5.5) $\int_a^b f_n(x)\,dx$ $\forall n \in N$ и $\int_a^b f(x)\,dx$.

Поскольку $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, то в соответствии с определением $\forall\epsilon > 0$ $\exists N(\epsilon)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon)$ и $\forall x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$. Отсюда $\forall n > N(\epsilon)$ можно оценить разность интегралов следующим образом:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx <$$

$$< \frac{\epsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \epsilon.$$

Полученное неравенство означает

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Таким образом доказано, что равномерно сходящиеся на компакте функциональные последовательности можно почленно интегрировать (или, по-другому, операции интегрирования и предельного перехода коммутируют между собой). Поточечно сходящиеся функциональные последовательности в одних случаях допускают почленное интегрирование, в других нет, что иллюстрируют следующие два контрпримера.

Пример 1. Функциональная последовательность $f_n(x) = n^2(1-x)x^n$ на отрезке $[0;1]$ поточечно сходится к $f(x) \equiv 0$. Поскольку

$$R_n = \max_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to +\infty$$

равномерной сходимости нет. Но

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

т. е.

$$0 = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{\text{поточечный предел}} dx \neq$$

$$\neq \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Пример 2. Функциональная последовательность $f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x^2)^n$ на отрезке $[0;1]$ поточечно сходится к $f(x) \equiv 0$. Поскольку

$$R_n = \max_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{2n})^n} \to \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

равномерной сходимости нет. Однако

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \sqrt{n}x(1-x^2)^n dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\left(-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right)\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\frac{1}{2(n+1)}\right) = 0$$

т. е.

$$0 = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{\text{поточечный предел}} dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

Теорема (дифференцирование равномерно сходящихся функциональных последовательностей). *Пусть для функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in [a;b]$ выполнены следующие условия:*

а) $f_n(x) \in C^1[a;b] \quad \forall n \in N$;

б) *при некотором* $x_0 \in [a;b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится;*

в) $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ *на* $[a;b]$,

тогда

а′) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a;b]$;

б′) $f(x) \in C^1[a;b]$;

в′) $f'(x) = \varphi(x)$ *или* $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

Примечание. Здесь в обеих частях равенства стоят равномерные пределы функциональных последовательностей.

Доказательство. Пусть $x \in [a;b]$ — произвольная точка, тогда функциональную последовательность $\{f_n'(x)\}$ можно почленно интегрировать по отрезку $[x_0;x]$ (или $[x;x_0]$), тогда $\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \to \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$, причем $\varphi(x) \in C[a;b]$.

Так как $\forall n \in N$ для функции $f_n(x)$ справедливо представление

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)dt,$$

то найдем отсюда предел (поточечный)

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt,$$

$$\text{где } f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0).$$

Полученное равенство означает $f(x) \in C^1[a;b]$ и $f'(x) = \varphi(x)$ (см. § 5.8).

Докажем, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, для этого оценим по модулю остаток

$$|r_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \left| f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - \varphi(t)|\,dt.$$

Поскольку $f(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется номер N_ϵ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполнено неравенство $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Поскольку $f_n'(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на $[a;b]$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $\tilde{N}_\epsilon$ такой, что $\forall n > \tilde{N}_\epsilon$ и $\forall t \in [a;b]$ выполнено неравенство $|f_n'(t) - \varphi(t)| < \dfrac{\epsilon}{2(b-a)}$, отсюда при любом $n > \max(N_\epsilon, \tilde{N}_\epsilon)$ и $\forall x \in [a;b]$

$$|r_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

т. е. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$. **Теорема доказана.**

Замечание 4. Одной равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ недостаточно для почленного дифференцирования, что иллюстрирует следующий контрпример. Функциональная последовательность $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ на отрезке $[0;1]$ равномерно сходится к $f(x) \equiv 0$. Очевидно $f'(x) \equiv 0$, но формально, продифференцировав рассматриваемую функциональную последовательность, получим $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ расходящуюся $\forall x \in [0;1]$ последовательность.

10.3. Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Пусть $\forall i \in N$ определена некоторая функция $u_i(x)$, где $x \in E \subset R$. Составим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, который принято называть *функциональным рядом*. Функцию $u_i(x)$ называют i-м членом ряда, а функцию

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

n-частичной суммой функционального ряда. Зафиксируем некоторое значение $x_0 \in E$, тогда индуцируется числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$. Для каждого такого ряда можно говорить о его сходимости или расходимости. Напомним, что сходимость или расходимость числового ряда определяется как сходимость или расходимость числовой последовательности его частичных сумм, т. е. последовательности $\{S_n(x_0)\}$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ называется *сходящимся в точке* x_0, если в этой точке сходится числовая последовательность его частичных сумм $\{S_n(x_0)\}$, иначе — *расходящейся*. Если функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится в каждой точке $x \in E$, то ряд называется *сходящимся на множестве* E.

Сформулированное определение сходимости функционального ряда означает поточечную сходимость функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ на множестве E, поэтому такой тип сходимости функционального ряда называют *поточечной сходимостью.* Само же определение теперь можно переформулировать следующим образом: функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ называется поточечно сходящимся на множестве E, если на этом множестве E сходится поточечно функциональная последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм.

Если функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится поточечно на множестве E, то $\forall x_0 \in E$ определено (единственное!) число, равное сумме сходящегося числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$, тем самым на E задана некоторая новая функция $S(x)$: $x_0 \to \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$, которую называют *поточечной суммой функционального ряда*, пишут $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, $x \in E$. Такое равенство называют также *разложением функции* $S(x)$ *в ряд по функциям* $u_1(x), u_2(x), \ldots$

Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится поточечно на множестве E и $S(x)$ его поточечная сумма, тогда в соответствии с определением поточечной сходимости функционального ряда это означает, что для любого $x \in E$ и для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N(\epsilon, x)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon, x)$ выполняется неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon \quad \text{или} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} u_i(x) - S(x)\right| < \epsilon.$$

Если ввести в рассмотрение функцию $R_n(x) = S_n(x) - S(x)$, то определение поточечной сходимости можно теперь сформулировать так:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \text{ сходится поточечно к функции } S(x)\right.$$

$$\left.\text{на множестве } E\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\forall x \in E, \ \ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists N(\epsilon, x)\right.$$

$$\left.\text{такой, что } \forall n > N(\epsilon, x) \ \ |R_n(x)| < \epsilon\right).$$

Как и в случае поточечной сходимости функциональных последовательностей для поточечной сходимости функционального ряда номер $N(\epsilon, x)$ зависит как от x, так и от ϵ. В случае если номер $N(\epsilon, x)$ будет зависеть только от ϵ, т. е. номер $N(\epsilon)$ один для всех $x \in E$, то мы получаем понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ называется *равномерно сходящимся на множестве* E, если для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \epsilon$ (или $R_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$, или $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in E$).

Еще раз отметим, что в этом определении номер $N(\epsilon)$ универсален, он не зависит от $x \in E$, а зависит лишь от ϵ, начиная с этого номера, неравенство $|R_n(x)| < \epsilon$ справедливо сразу для всех $x \in E$.

Непосредственно из определения следует, что из равномерной сходимости функционального ряда следует его поточечная сходимость, но не наоборот.

Поскольку равномерная сходимость функционального ряда эквивалентна равномерной сходимости функциональной последовательности его частичных сумм, то, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей, можно получить соответствующее утверждение для функциональных рядов.

Теорема (критерий Коши). *Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$ на множестве E тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$, для любого натурального $p \in N$ и при всех $x \in E$ выполняется неравенство*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

Доказательство. В соответствии с определением функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$ на множестве E, если функциональная последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$ на множестве E. Последнее согласно критерию Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$, для любого натурального $p \in N$ и при всех $x \in E$ выполняется неравенство $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon$. Подставляя в последнее неравенство выражения для частичных сумм $S_{n+p}(x)$ и $S_n(x)$, получим доказываемое утверждение. **Теорема доказана.**

Критерий Коши, будучи универсальным признаком, не удобен в приложениях, поэтому в тех случаях, где его можно избежать, используют другие достаточные признаки равномерной сходимости, с одним из которых сейчас и познакомимся.

Теорема (признак Вейерштрасса). *Если $\forall i \in N$ $|u_i(x)| \leq M_i$, $\forall x \in E$ и числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ сходится,* *то функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится равномерно на множестве* E.

Доказательство. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ сходится, то в соответствии с критерием Коши сходимости числового ряда для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ и для любого натурального $p \in N$ выполняется неравенство

$$|M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_{n+p}| < \epsilon.$$

Поскольку $M_i \geq 0$ $\forall i \in N$, то знак модуля в последнем неравенстве можно опустить, поэтому для любого $n > N(\epsilon)$, для любого натурального $p \in N$ и при всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |u_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} M_i < \epsilon.$$

Отсюда в соответствии с критерием Коши равномерной сходимости функциональных рядов получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

Примечание. Признак Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым, т. е. из расходимости числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ не следует ни сходимость, ни расходимость функционального ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$. Например, если $E = \{a\}$ точечное множество и $u_i(x) = \dfrac{(-1)^i}{i}$, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на $E = \{a\}$, в то же время $M_i = |u_i(x)| = \dfrac{1}{i}$ — расходящийся ряд.

Пример 1. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{i \ln^2 i}\right)$, $|x| \le a$. Поскольку $|u_i(x)| \le \dfrac{x^2}{i\ln^2 i} \le \le \dfrac{a^2}{i\ln^2 i}$ и числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \dfrac{a^2}{i\ln^2 i}$ сходится (см. примеры 7 и 8 из § 9.3), то по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно.

Пример 2. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2 + i^3}$, $|x| < +\infty$. В силу неравенства Коши $x^2+i^3 \ge 2|x|i^{3/2}$, но поскольку $|u_i(x)| \le \dfrac{2|x|}{x^2 + i^3} \le \dfrac{2|x|}{2|x|i^{3/2}} = = \dfrac{1}{i^{3/2}}$ и числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \dfrac{1}{i^{3/2}}$ сходится (см. пример 6 из § 9.2), то по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно.

Пример 3. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x}{1 + x^2 i^4}$, $x \in [0; +\infty)$. В силу неравенства Коши $1 + x^2 i^4 \ge 2|x|i^2$, но поскольку $|u_i(x)| \le \dfrac{|x|}{1 + x^2 i^4} \le \dfrac{|x|}{2|x|i^2} = = \dfrac{1}{2i^2}$ и числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \dfrac{1}{2i^2}$ сходится (см. пример 6 из § 9.2), то по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно.

В заключение параграфа приведем формулировку критерия Коши неравномерной сходимости

Теорема (критерий Коши неравномерной сходимости). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится неравно-*

мерно к функции $S(x)$ на множестве E тогда и только тогда, когда найдется $\epsilon_0 > 0$ такое, что для любого натурального N найдутся номер $n > N(\epsilon)$, натуральное $p \in N$ и элемент $x_0 \in E$ такие, что выполняется неравенство

$$|u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + \ldots + u_{n+p}(x_0)| \geq \epsilon_0.$$

Пример 4. Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ сходится поточечно к функции e^x. По признаку Вейерштрасса этот ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a; b] \subset R$, однако на R этот ряд сходится неравномерно. Действительно, для $\epsilon_0 = 1$ положим $x_n = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (см. пример 6 § 2.1), тогда $u_n(x_n) = \frac{(\sqrt[n]{n!})^n}{n!} = 1 \geq \epsilon_0$.

10.4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Теорема (о перестановке пределов). *Если $\forall i \in N$ $u_i(x) \in C[a; b]$ и функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a; b]$, тогда его сумма $S(x) \in C[a; b]$.*

Доказательство. В соответствии с определением функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a; b]$, если сходится равномерно на отрезке $[a; b]$ функциональная последовательность его частичных сумм $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in [a; b]$. Поскольку $\forall i \in N$ $u_i(x) \in C[a; b]$, то все $S_n(x) \in C[a; b]$ как сумма конечного числа непрерывных на $[a; b]$ функций. Отсюда по теореме о перестановке пределов для функциональных последовательностей получаем $S(x) \in C[a; b]$. **Теорема доказана.**

Теорема Дини (для функциональных рядов). *Пусть для функционального ряда* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, $x \in [a; b]$, *выполнены следующие условия:*

а) $u_i(x) \in C[a; b] \ \ \forall i \in N$;

б) $u_i(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [a; b], \forall i \in N$;

в) *функциональный ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится поточечно на отрезке* $[a; b]$ *к функции* $S(x)$;

г) $S(x) \in C[a; b]$,

тогда функциональный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a; b]$.

Доказательство. В соответствии с определением функциональный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a; b]$ к функции $S(x)$, если сходится равномерно на отрезке $[a; b]$ функциональная последовательность его частичных сумм $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in [a; b]$. Поскольку $\forall i \in N$ $u_i(x) \in C[a; b]$, то все $S_n(x) \in C[a; b]$ как сумма конечного числа непрерывных на $[a; b]$ функций. Поскольку $u_i(x) \leq 0$ $\forall x \in [a; b], \forall i \in N$, то функциональная последовательность $\{S_n(x)\}$ является монотонно убывающей на $[a; b]$. По условиям теоремы функциональная последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится поточечно на отрезке $[a; b]$ к функции $S(x)$ и $S(x) \in C[a; b]$, таким образом выполнены все условия теоремы Дини для функциональных последовательностей, т.е. $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in [a; b]$, что и означает (по определению) равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, $x \in [a; b]$. **Теорема доказана.**

Теорема (о почленном интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов). *Пусть для функционального ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, $x \in [a; b]$, *выполнены следующие условия:*

а) $u_i(x) \in C[a;b]$ $\forall i \in N$;

б) *функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a;b]$ *к функции* $S(x)$,

тогда $\forall c \in [a;b]$ *функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_i(t)\,dt$ *сходится равномерно на отрезке* $[a;b]$, *причем*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_c^x u_i(t)dt = \int_c^x S(t)\,dt \qquad \text{или}$$

$$\int_c^x \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) \right) dt = \int_c^x S(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_c^x u_i(t)\,dt.$$

Доказательство. Так как $u_i(x) \in C[a;b]$ $\forall i \in N$ и по теореме о перестановке пределов для функциональных рядов $S(x) \in C[a;b]$, то существуют все римановские интегралы (см. § 5.5), фигурирующие в доказываемых равенствах.

Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$ — n-частичная сумма ряда, $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ — остаток ряда, $\sigma_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_c^x u_i(t)\,dt$ — n-частичная сумма формально проинтегрированного функционального ряда. Оценим разность

$$\left| \int_c^x S(t)\,dt - \sigma_n(x) \right| = \left| \int_c^x S(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_c^x u_i(t)\,dt \right| \le$$

$$\leq \int_c^x |R_n(t)|\,dt \leq \sup_{t\in[a;b]} |R_n(t)|\cdot|x-c| \leq (b-a)\sup_{t\in[a;b]}|R_n(t)|.$$

Поскольку функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, то $R_n(t) \rightrightarrows 0$, $t \in [a;b]$ (или $\sup\limits_{t\in[a;b]} |R_n(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$), поэтому для любого $\epsilon_0 > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t\in[a;b]} |R_n(t)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$, отсюда вытекает оценка

$$\left| \int_c^x S(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_c^x u_i(t)\,dt \right| < \epsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Полученное неравенство означает, что функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_i(t)\,dt$ сходится равномерно к функции $\int\limits_c^x S(t)\,dt$.
Теорема доказана.

Пример 1. Доказанную теорему можно применять для получения степенных разложений функций. Проиллюстрируем это на примере вычисления числа $\ln 2$. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$ Если $|x| \leq q < 1$, то $|u_i(x)| = |x|^i \leq q^i$, но числовой ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ сходится (как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии), поэтому по признаку Вейерштрасса рассматриваемый ряд сходится равномерно на отрезке $[-q;q]$ к функции $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, следовательно, в силу доказанной теоремы

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^x t^i\,dt,$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+1}}{i+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Полагая $x = \frac{1}{2}$, имеем

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

Замечание. Как и функциональные последовательности, поточечно сходящиеся функциональные ряды в одних случаях допускают почленное интегрирование, в других нет, что иллюстрируют следующие два контрпримера.

Пример 2. Рассмотрим функциональный ряд на $[0;1]$

$$(1-x)x + \left[2^2(1-x)x^2 - (1-x)x\right] + \ldots +$$

$$+ \left[i^2(1-x)x^i - (i-1)^2(1-x)x^{i-1}\right] + \ldots$$

Здесь

$$S_n(x) = n^2(1-x)x^n \quad \xrightarrow{\text{поточечно}} \quad S(x) = 0,$$

(доказательство неравномерной сходимости см. пример 1 § 10.2). Формально проинтегрируем данный ряд почленно

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 \left[i^2(1-x)x^i - (i-1)^2(1-x)x^{i-1}\right] dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} n^2 \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 \neq$$

$$\neq \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[i^2(1-x)x^i - (i-1)^2(1-x)x^{i-1} \right] \right) dx =$$

$$= \int_0^1 S(x)\, dx = 0,$$

т. е. в данном случае почленное интегрирование незаконно.

Пример 3. Рассмотрим функциональный ряд на $[0; 1]$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[(x^i - x^{2i}) - (x^{i-1} - x^{2(i-1)}) \right],$$

для которого

$$S_n(x) = x^n - x^{2n} \quad \xrightarrow{\text{поточечно}} \quad S(x) = 0,$$

(доказательство неравномерной сходимости см. пример 7 § 10.1). После формального почленного интегрирования имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 u_i(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(2n+1)} = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)\, dx = \int_0^1 S(x)\, dx = 0,$$

т. е. здесь возможно почленное интегрирование.

Теорема (дифференцирование равномерно сходящихся функциональных рядов). *Пусть для функционального ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, $x \in [a;b]$, *выполнены следующие условия:*

а) $u_i(x) \in C^1[a;b] \quad \forall i \in N$;

б) *при некотором* $x_0 \in [a;b]$ *числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$ *сходится;*

в) *функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a;b]$ *к функции* $\varphi(x)$,

тогда

а′) *функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a;b]$ *к функции* $S(x)$;

б′) $S(x) \in C^1[a;b]$;

в′) $S'(x) = \varphi(x)$.

Примечание. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)\right)' = S'(x) = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i'(x).$$

Доказательство. Пусть $x \in [a;b]$ произвольная точка, тогда равномерно сходящийся функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$ можно почленно проинтегрировать по отрезку $[x_0;x]$ (или $[x;x_0]$)

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} u_i'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Для членов ряда $u_i(x) \in C^1[a;b]$ $\forall i \in N$ справедливо представление

$$u_i(x) = u_i(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} u_i'(t)\,dt,$$

отсюда получаем следующее представление для исходного ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(u_i(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} u_i'(t)\,dt\right).$$

Покажем, что функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно к функции

$$S(x) = S(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt, \quad \text{где} \quad S(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x_0).$$

Для этого оценим по модулю остаток

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| =$$

$$= \left| S(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n}\left(u_i(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} u_i'(t)\,dt\right)\right| \le$$

$$\le \left| S(x_0) - \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)\right| + \int\limits_{x_0}^{x}\left|\varphi(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i'(t)\right| dt.$$

Поскольку $S(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| S(x_0) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Поскольку функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$ к функции $\varphi(x)$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N_1(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N_1(\epsilon)$ и $\forall t \in [a;b]$ выполняется неравенство

$$\left|\varphi(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i'(t)\right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Поэтому $\forall n > \max(N(\epsilon), N_1(\epsilon))$ и $\forall x \in [a;b]$

$$|R_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \epsilon.$$

Таким образом доказано, что функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$ к функции $S(x)$. Из выражения для функции $S(x)$ получаем, что $S(x) \in C^1[a;b]$ и $S'(x) = \varphi(x)$. **Теорема доказана.**

10.5. Признаки Дирихле, Абеля и Чоунди–Джолиффе равномерной сходимости функционального ряда

Теорема (признак Дирихле). *Пусть для функционального ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x) \cdot b_i(x)$, $x \in E$, *выполнены следующие условия:*

а) *функциональная последовательность* $a_i(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$, *монотонно;*

б) *функциональная последовательность частичных сумм* $B_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)$ *ограничена на* E,

тогда функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x) \cdot b_i(x)$ *сходится равномерно на* E.

Доказательство. В силу условия б) теоремы существует постоянная $B > 0$ такая, что $|B_n(x)| < B$, $\forall n \in N$, $\forall x \in E$. В силу условия а) для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ и $\forall x \in E$ выполняется неравенство $|a_i(x)| < \dfrac{\epsilon}{3B}$. Используя неравенство Абеля (см. § 9.7), получаем неравенство

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(x) \cdot b_i(x)\right| \leq B(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \epsilon,$$

справедливое $\forall x \in E$, $\forall n > N(\epsilon)$, $\forall p \in N$, что в соответствии с критерием Коши равномерной сходимости функциональных рядов означает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Теорема (признак Абеля). *Пусть для функционального ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x) \cdot b_i(x)$, $x \in E$ *выполнены следующие условия:*

а) *функциональная последовательность* $\{a_i(x)\}$ *монотонна и ограничена* $\forall x \in E$ *(т. е.* $|a_i(x)| \leq M$*);*

б) *функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(x)$ *сходится равномерно на* E,

тогда функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x) \cdot b_i(x)$ *сходится равномерно на* E.

Доказательство. В силу условия б) теоремы в соответствии с критерием Коши равномерной сходимости функциональных рядов для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ при всех $x \in E$ и $\forall p \in N$, выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i(x)\right| < \dfrac{\epsilon}{3M}$, что означает ограниченность функциональной последовательности $|B_p(x)| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i(x)\right|$. Применяя теперь неравенство Абеля, получим

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(x)\cdot b_i(x)\right| \le \frac{\epsilon}{3M}(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \epsilon,$$

что согласно критерию Коши равномерной сходимости функциональных рядов означает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Пример 1. Рассмотрим функциональный ряд вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi i}{3}}{\sqrt{i^2+x^2}}$, $x \in R$. Представим общий член ряда в виде произведения двух множителей $a_i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{i^2+x^2}} \le \dfrac{1}{i} \rightrightarrows 0$ $\forall x \in R$ и $b_i(x) = \cos\dfrac{2\pi i}{3}$. Последовательность частичных сумм ряда с общим членом $b_i(x)$ ограничена $|S_n| \le \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, таким образом по признаку Дирихле ряд сходится равномерно.

Пример 2. Рассмотрим функциональный ряд вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+ix^3}\right)^3$, $x \ge 0$. Представим общий член ряда в виде произведения двух множителей $a_i(x) = \dfrac{1}{1+ix^3}$ и $b_i(x) = \dfrac{x^6}{(1+ix^3)^2}$. Последовательность $a_i(x)$ монотонна и ограничена: $a_i(x) \le 1$ $\forall x \ge 0$. Из оценки

$$b_i(x) = \frac{x^6}{(1+ix^3)^2} = \frac{1}{i^2\cdot\left(1+\frac{1}{ix^3}\right)^2} \le \frac{1}{i^2}$$

следует равномерная сходимость (по признаку Вейерштрасса) функционального ряда с общим членом $b_i(x)$, т.е. по признаку Абеля ряд сходится равномерно.

Теорема (критерий Чоунди – Джолиффе). *Пусть числовая последовательность* $\{b_i\}$ *монотонно убывает и* $b_i > 0$ *в этих условиях функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i \sin(ix)$ *сходится равномерно на* R *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{i\to\infty}(ib_i) = 0$.

Примечание. В силу нечетности *всех* слагаемых этого ряда, а также их 2π-периодичности вместо равномерной сходимости на R достаточно доказать равномерную сходимость на отрезке $[0;\pi]$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i \sin(ix)$ сходится равномерно на R тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ при всех $x \in [0;\pi]$ и $\forall p \in N$, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i \sin(ix)\right| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}.$$

Положим в этом неравенстве $p = n$, $x_n = \dfrac{\pi}{4n}$, тогда для $i = n+1, \ldots, 2n$ справедливо двойное неравенство

$$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi(n+1)}{4n} \leq ix_n = \frac{i\pi}{4n} \leq \frac{2n\pi}{4n} = \frac{\pi}{2}$$

и в силу монотонного возрастания функции $\sin t$ на отрезке $[0; \dfrac{\pi}{2}]$ получаем

$$\sin(ix_n) > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \quad \text{при} \quad i = n+1, \ldots, 2n.$$

Отсюда в силу неотрицательности $b_i > 0$ и монотонного убывания последовательности $\{b_i\}$ получаем

$$\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} > \left|\sum_{i=n+1}^{2n} b_i \sin(ix)\right| = \sum_{i=n+1}^{2n} b_i \sin(ix) >$$

$$> \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{2}}{2} b_i \geq \frac{\sqrt{2}}{2} n b_{2n}$$

или $2nb_{2n} < \epsilon$. Если положить $p = n + 1$, $x_n = \dfrac{\pi}{4(n+1)}$, то, повторяя все рассуждения, получим $(2n+1)b_{2n+1} < \epsilon$. В совокупности два полученных неравенства означают $\lim\limits_{i\to\infty}(ib_i) = 0$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(nb_n) = 0$, тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ выполняется неравенство $|nb_n| = nb_n < \epsilon$ или $b_n < \dfrac{\epsilon}{n}$. Выберем произвольные $n > N(\epsilon)$, $p \in N$, $x \in [0; \pi]$ и составим сумму

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i \sin(ix)\right| \leq \left|\sum_{i=n+1}^{\left[\frac{\pi}{x}\right]} b_i \sin(ix)\right| + \left|\sum_{i=\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}^{n+p} b_i \sin(ix)\right|$$

(если $\left[\dfrac{\pi}{x}\right] < n + 1$, то первая сумма отсутствует).

Если $i = n+1, \dots, \left[\dfrac{\pi}{x}\right]$, то $0 \leq ix \leq \left[\dfrac{\pi}{x}\right] x \leq \dfrac{\pi}{x} \cdot x = \pi$, и в силу неравенства $0 \leq \sin t \leq t$ при $t \geq 0$ получаем

$$0 \leq \left|\sum_{i=n+1}^{\left[\frac{\pi}{x}\right]} b_i \sin(ix)\right| = \sum_{i=n+1}^{\left[\frac{\pi}{x}\right]} b_i \sin(ix) < \sum_{i=n+1}^{\left[\frac{\pi}{x}\right]} \frac{\epsilon}{i} \cdot ix =$$

$$= \epsilon x \left(\left[\frac{\pi}{x}\right] - n\right) \leq \epsilon x \left(\frac{\pi}{x} - n\right) = \epsilon(\pi - nx) < \epsilon\pi.$$

Ко второй сумме применим преобразование Абеля (см. лемму из § 9.7)

$$\left|\sum_{i=\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}^{n+p} b_i \sin(ix)\right| = \left|\sum_{i=\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}^{n+p-1} (b_i - b_{i+1})B_i + b_{n+p}\cdot B_{n+p}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}^{n+p-1} (b_i - b_{i+1})|B_i| + b_{n+p}\cdot |B_{n+p}| \leq$$

$$\leq \max_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1\leq i\leq n+p} |B_i|\cdot\left(\sum_{i=\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}^{n+p-1} (b_i - b_{i+1}) + b_{n+p}\right) =$$

$$= \max_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1\leq i\leq n+p} |B_i|\cdot b_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1},$$

здесь

$$B_i = \sum_{j=\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}^{i} \sin(jx) = \sum_{j=1}^{i}\sin(jx) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{\pi}{x}\right]}\sin(jx) =$$

(см. формулу из примера 1, § 9.7)

$$= \frac{\sin\left(\frac{i+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{ix}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{\left[\frac{\pi}{x}\right]x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\left(\left[\frac{\pi}{x}\right]+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\left(\left[\frac{\pi}{x}\right]+\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Отсюда, поскольку функция $y = \dfrac{t}{\sin t}$ монотонно возрастает на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, (так как $y' = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}(\operatorname{tg} t - t) > 0$) получаем оценку

$$\max_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1 \le i \le n+p} |B_i| \le \frac{2}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} \le$$

$$\le \frac{\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot x} < \frac{\pi}{x},$$

т. е.

$$\left|\sum_{i=\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}^{n+p} b_i \sin(ix)\right| < \frac{\pi}{x} \cdot \frac{\epsilon}{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1} < \left(\left[\frac{\pi}{x}\right]+1\right) \cdot \frac{\epsilon}{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1} = \epsilon.$$

Таким образом получена оценка

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i \sin(ix)\right| < \epsilon\pi + \epsilon = \epsilon(\pi + 1),$$

справедливая при всех $n > N(\epsilon)$, $p \in N$, $x \in [0; \pi]$, которая, в силу произвольности $\epsilon > 0$, означает равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i \sin(ix)$ на отрезке $[0; \pi]$, а значит, и на всей числовой прямой R. **Теорема доказана.**

Пример 3. Функциональный ряд вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\sin(ix)}{i \ln^\alpha i}$, $0 < \alpha \le 1$, по признаку Чоунди–Джолиффе сходится равномерно, поскольку числовая последовательность $b_i = \dfrac{1}{i \ln^\alpha i}$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

11. Степенные ряды

11.1. Понятие степенного ряда. Область сходимости, радиус сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, где $a_i \in R$ — постоянные числа, называемые *коэффициентами* ряда. Множество значений переменной x, при которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости,* соответственно *область расходимости* это совокупность значений переменной x, при которых ряд расходится. Естественно, возникает проблема описания этих областей. Этот вопрос решен полностью.

Очевидно область сходимости всегда не пуста, так как число $x = 0$ принадлежит области сходимости.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд сходится при некотором значении $x = x_0$, то он сходится абсолютно на множестве $|x| < |x_0|$.*

Доказательство. Действительно, если ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i$ сходится, то в силу необходимого условия сходимости числовых рядов $\lim\limits_{i\to\infty} a_i x_0^i = 0$, т. е. числовая последовательность $\{a_i x_0^i\}$ сходится (бесконечно малая), а значит, ограничена. Таким образом доказано существование положительной константы $M > 0$ такой, что $|a_i x_0^i| < M \quad \forall i \in N$.

Рассмотрим теперь степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ при $|x| < |x_0|$. Для любого $\forall i \in N$

$$|a_i x^i| = |a_i| \cdot |x|^i = |a_i| \cdot |x_0|^i \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^i < M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^i,$$

но так как $|x| < |x_0|$, то $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$. Ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} M q^i$ сходится, поэтому в силу признака сравнения степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится абсолютно. **Теорема доказана.**

Теорема Абеля позволяет сразу представить себе как расположены области сходимости и расходимости. Если x_0 точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ состоит из точек сходимости. Напротив, если x_0 точка расходимости, то полупрямые $(-\infty; -|x_0|)$ и $(|x_0|; +\infty)$ состоят из точек расходимости. Таким образом, если двигаться по числовой прямой от нуля вправо или влево, то сначала мы будем иметь сплошь точки абсолютной сходимости, а начиная с некоторого числа сплошь точки расходимости. Число

$$R = \sup\left\{|x|;\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i \text{ сходится}\right\} \equiv$$
$$\equiv \sup\left\{|x|;\ x \text{ из области сходимости}\right\}$$

называется *радиусом сходимости*, а интервал $(-R; R)$ — *интервалом сходимости*. Поскольку верхняя грань числового множества может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству, то область сходимости степенного ряда содержит интервал сходимости и быть может еще точки $x = R$ и $x = -R$. Если $R = 0$, то интервал сходимости (область сходимости) вырождается в точку $x = 0$, если же $R = \infty$, то интервал сходимости (область сходимости) превращается во всю числовую ось.

Относительно поведения степенного ряда внутри интервала сходимости имеет место следующая теорема

Теорема. *Степенной ряд сходится равномерно во всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости.*

Доказательство. Пусть $[-\rho; \rho] \subset (-R; R)$, т. е. $\rho < R$. Возьмем какое-нибудь число ρ_1, лежащее между ρ и R, т. е.

$\rho < \rho_1 < R$. Поскольку ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \rho_1^i$ сходится абсолютно, то $\forall x \in [-\rho; \rho]$ имеем $|a_i x^i| = |a_i| \cdot |x|^i \le |a_i| \cdot \rho^i < |a_i| \cdot \rho_1^i$, т. е. в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

В соответствии с теоремой о непрерывности суммы равномерно сходящихся функциональных рядов справедливо следующее

Следствие. *Сумма степенного ряда является функцией непрерывной на всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости.*

Теорема (о радиусе сходимости). 1) *Если существует конечный предел* $L = \lim\limits_{i \to \infty} \sqrt[i]{|a_i|} \ne 0$, *то* $R = \dfrac{1}{L}$.

2) *Если существует конечный предел* $L = \lim\limits_{i \to \infty} \left| \dfrac{a_{i+1}}{a_i} \right| \ne 0$, *то* $R = \dfrac{1}{L}$.

Доказательство. 1) Действительно, если $L = \lim\limits_{i \to \infty} \sqrt[i]{|a_i|}$, то $\lim\limits_{i \to \infty} \sqrt[i]{|a_i x^i|} = |x| \lim\limits_{i \to \infty} \sqrt[i]{|a_i|} = L|x|$, поэтому на основании признака Коши (корневого), ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится абсолютно при $L|x| < 1$ и расходится при $L|x| > 1$. Следовательно, интервал сходимости степенного ряда задается неравенством $|x| < \dfrac{1}{L}$, при $|x| > \dfrac{1}{L}$ ряд расходится, т. е. число $R = \dfrac{1}{L}$ является радиусом сходимости.

Заметим, что если $L = 0$, то для любого $x \in R$ имеем $\lim\limits_{i \to \infty} \sqrt[i]{|a_i x^i|} = 0$, а потому (по признаку Коши) степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится абсолютно при всех $x \in R$, т. е. его радиус сходимости $R = +\infty$. Если $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = +\infty$, то при всех $x \in R$, кроме $x = 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i x^i|} = +\infty$, а потому степенной ряд расходится, следовательно для такого ряда $R = 0$.

2) Допустим, что $L = \lim\limits_{i\to\infty} \left|\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\right|$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} \left|\dfrac{a_{i+1}x^{i+1}}{a_i x^i}\right| = |x| \lim\limits_{i\to\infty} \left|\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\right| = |x|L$. Теперь на основании признака Даламбера, как и выше, заключаем, что при $|x| < \dfrac{1}{L}$ степенной ряд сходится абсолютно, а при $|x| > \dfrac{1}{L}$ ряд расходится, т. е. число $R = \dfrac{1}{L}$ является радиусом сходимости, если только $L \neq 0$. Если же $L = 0$, то при любом $x \in R$ степенной ряд сходится абсолютно, если же $L = +\infty$, то при всех $x \in R$, кроме $x = 0$, степенной ряд расходится. **Теорема доказана.**

Таким образом, мы имеем две формулы для вычисления радиуса сходимости, применение которых в конкретных случаях определяется соображениями удобства.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^i x^i$. Поскольку $L = \dfrac{1}{R} = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|2^i|} = 2$, то радиус сходимости $R = \dfrac{1}{2}$, отсюда $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ — интервал сходимости. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. При $x = \dfrac{1}{2}$ исследуемый ряд имеет вид $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^i \dfrac{1}{2^i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} 1$, т. е. расходится, а при $x = -\dfrac{1}{2}$ ряд имеет вид $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^i \dfrac{1}{(-2)^i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i$ и также расходится. Итак, область сходимости совпадает с интервалом сходимости.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^i}{i}$. Применим формулу Даламбера $L = \frac{1}{R} = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim_{i\to\infty}\frac{i}{i+1} = 1$, поэтому радиус сходимости $R = 1$, отсюда $(-1;1)$ — интервал сходимости. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. При $x = 1$ исследуемый ряд имеет вид $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}$ и сходится условно, при $x = -1$ ряд имеет вид $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i}$, т.е. является гармоническим и расходится. Итак, областью сходимости является множество $(-1;1]$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i^2}$. В этом примере можно применять любую из двух формул. Действительно, $L = \frac{1}{R} = \lim_{i\to\infty}\frac{i^2}{(i+1)^2} = \lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{\frac{1}{i^2}} = 1$, поэтому радиус сходимости $R = 1$, отсюда $(-1;1)$ — интервал сходимости. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. При $x = 1$ исследуемый ряд имеет вид $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i^2}$ и сходится, при $x = -1$ ряд имеет вид $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2}$, т.е. является абсолютно сходящимся. Итак, областью сходимости является множество $[-1;1]$.

Разобранные три примера еще раз показывают, что внутри интервала сходимости имеем всегда абсолютную сходимость, а на его концах возможна любая ситуация (расходимость, условная сходимость, абсолютная сходимость).

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда $e^x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. В этом примере применим формулу Даламбера $L = \frac{1}{R} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{i!}{(i+1)!} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i+1} = 0$, следовательно $R = +\infty$. Ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

Пример 5. Найти области сходимости степенных рядов $\sin x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$ и $\cos x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$. Как и в предыдущем примере, данные ряды сходятся абсолютно на всей оси.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда $(1+x)^m = 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!} x^i$. Применим формулу Даламбера $L = \frac{1}{R} = \lim\limits_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim\limits_{i\to\infty} \left|\frac{m-i}{i+1}\right| = 1$, поэтому радиус сходимости $R = 1$, отсюда $(-1; 1)$ — интервал сходимости. Что касается точек $x = \pm 1$ ограничимся здесь констатацией следующих фактов: при $m > 0$ ряд сходится в точках $x = \pm 1$, при $-1 < m \leq 0$ ряд сходится при $x = 1$ и расходится при $x = -1$, при $m \leq -1$ ряд расходится в точках $x = \pm 1$.

11.2. Свойства сходящихся степенных рядов

Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Теорема. *Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать по любому отрезку* $[0; x]$, $|x| < R$, *при этом полученный в результате степенной ряд имеет тот же радиус сходимости.*

Доказательство. Пусть $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|}$. Рассмотрим формально продифференцированный степенной ряд, для вычисления его радиуса сходимости R_1 имеем формулу $\dfrac{1}{R_1} = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{i|a_i|} = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = \dfrac{1}{R}$, т.е. $R_1 = R$. На любом отрезке $[a; b] \subset (-R; R)$ продифференцированный и исходный степенные ряды сходятся абсолютно и равномерно, следовательно почленное дифференцирование законно и суммы этих рядов связаны между собой соответствующими равенствами.

Поскольку степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a; b] \subset (-R; R)$, то для него законна операция почленного интегрирования, а для радиуса сходимости нового степенного ряда имеем $\dfrac{1}{R_2} = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{\dfrac{|a_i|}{i}} = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = \dfrac{1}{R}$, т.е. $R_2 = R$ и для сумм таких рядов справедливо соответствующее равенство. **Теорема доказана.**

Следствие. *Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, радиусы сходимости получаемых при этом степенных рядов совпадают с радиусом сходимости исходного ряда, а их суммы связаны с суммой исходного ряда соответствующими равенствами.*

Пример 1. С помощью данной теоремы можно получать степенные разложения для различных функций. Известно, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Воспользуемся биномиальным разложением (см. пример 6 из предыдущего параграфа)

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!} x^i \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

Пусть $m = -\frac{1}{2}$, заменим x на $-x^2$, тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2i-1}{2}\right)}{i!}(-x^2)^i =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} x^{2i},$$

причем это разложение справедливо при $x^2 < 1$, так как радиус сходимости $R = 1$. Проинтегрируем полученный степенной ряд внутри интервала сходимости по отрезку $[0; x]$, $|x| < 1$, получим

$$\arcsin x = x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cdot \frac{x^{2i+1}}{2i+1},$$

эта формула справедлива при $|x| < 1$. Исследуем поведение этого ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x = 1$, тогда получаем для исследования следующий числовой ряд:

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cdot \frac{1}{2i+1},$$

сходимость которого ранее была уже доказана с помощью признака Раабе (см. пример 9 из § 8.3). Пусть теперь $x = -1$, тогда получим числовой ряд

$$-1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cdot \frac{1}{2i+1},$$

отличающийся от предыдущего знаком, поэтому также сходится. Итак, областью сходимости степенного ряда, полученного для функции $\arcsin x$, является отрезок $[-1; 1]$. Полагая в полученном разложении $x = 1$, имеем

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cdot \frac{1}{2i+1}.$$

Эта формула дает возможность приближенного вычисления числа π. Другую формулу для вычисления числа π можно получить, если положить $x = \frac{1}{2}$, тогда

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} \cdot \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cdot \frac{1}{2i+1}.$$

Пример 2. Известно, что $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Вновь воспользуемся биномиальным разложением, в котором положим $m = -1$ и заменим x на x^2, тогда при $|x| < 1$ получим

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\cdots(-i)}{i!} x^{2i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x^{2i}.$$

Проинтегрируем этот степенной ряд по отрезку $[0; x]$, $|x| < 1$, тогда

$$\operatorname{arctg} x = x + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

При $x = \pm 1$ этот степенной ряд также сходится, в чем легко можно убедиться, воспользовавшись признаком Лейбница. Отсюда при $x = 1$ имеем разложение

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

11.3. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд

Пусть степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ имеет интервал сходимости $(-R; R)$ и сумму $F(x)$, т.е. $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $|x| < R$. Говорят, что $F(x)$ может быть *разложена в степенной ряд* (или *представлена в виде степенного ряда*) на интервале $(-R; R)$. В соответствии с теоремой предыдущего параграфа степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри интервала $(-R; R)$, при этом

$$F^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i i(i-1)\cdots(i-k+1)x^{i-k}, \quad |x| < R$$

и каждый из этих степенных рядов сходится внутри $(-R; R)$ к соответствующей производной от функции $F(x)$. Положив в этих равенствах $x = 0$, получим $a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$, $k \in N$. Таким образом доказана следующая

Лемма. *Если функция $F(x)$ может быть разложена в степенной ряд (т. е. если существует степенной ряд, сходящийся к $F(x)$ в некотором интервале), то такой ряд только один, а именно, ряд Маклорена.*

Разумеется не всякую функцию можно разложить в степенной ряд: как показывает формула для коэффициентов Тейлора, для этого прежде всего *необходимо, чтобы она имела производные всех порядков в точке* $x = 0$. Однако одного этого не достаточно.

Поскольку суммы степенных рядов, полученных кратным дифференцированием, представляют собой функции, непрерывные внутри интервала сходимости, то справедлива еще одна

Лемма. *Для того чтобы функция $F(x)$ была разложима в степенной ряд на интервале $(-R; R)$, необходимо, чтобы эта функция была бы из класса $C^\infty(-R; R)$.*

Может оказаться, что функция дифференцируема сколько угодно раз в других точках, но в точке $x = 0$ либо сама функция, либо ее производные могут стать бесконечными. Например, функция $\ln x$. В этом случае можно искать разложение такой функции в степенной ряд по степеням $(x - a)$, где a — значение переменной, при котором сама функция и все ее производные конечны. Действительно, положим $x = a + h$, где h — новая переменная, тогда $F(x) = F(a+h)$ становится функцией от h и обозначив ее через $\varphi(h) = F(a+h)$ имеем $\varphi^{(i)}(h) = F^{(i)}(a+h)$, $i \in N$. Так как при $h = 0$ $\varphi^{(i)}(0) = F^{(i)}(a)$, то ряд Маклорена для функции $\varphi(h)$ имеет вид

$$\varphi(h) = F(a+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^{(i)}(a)}{i!} h^i$$

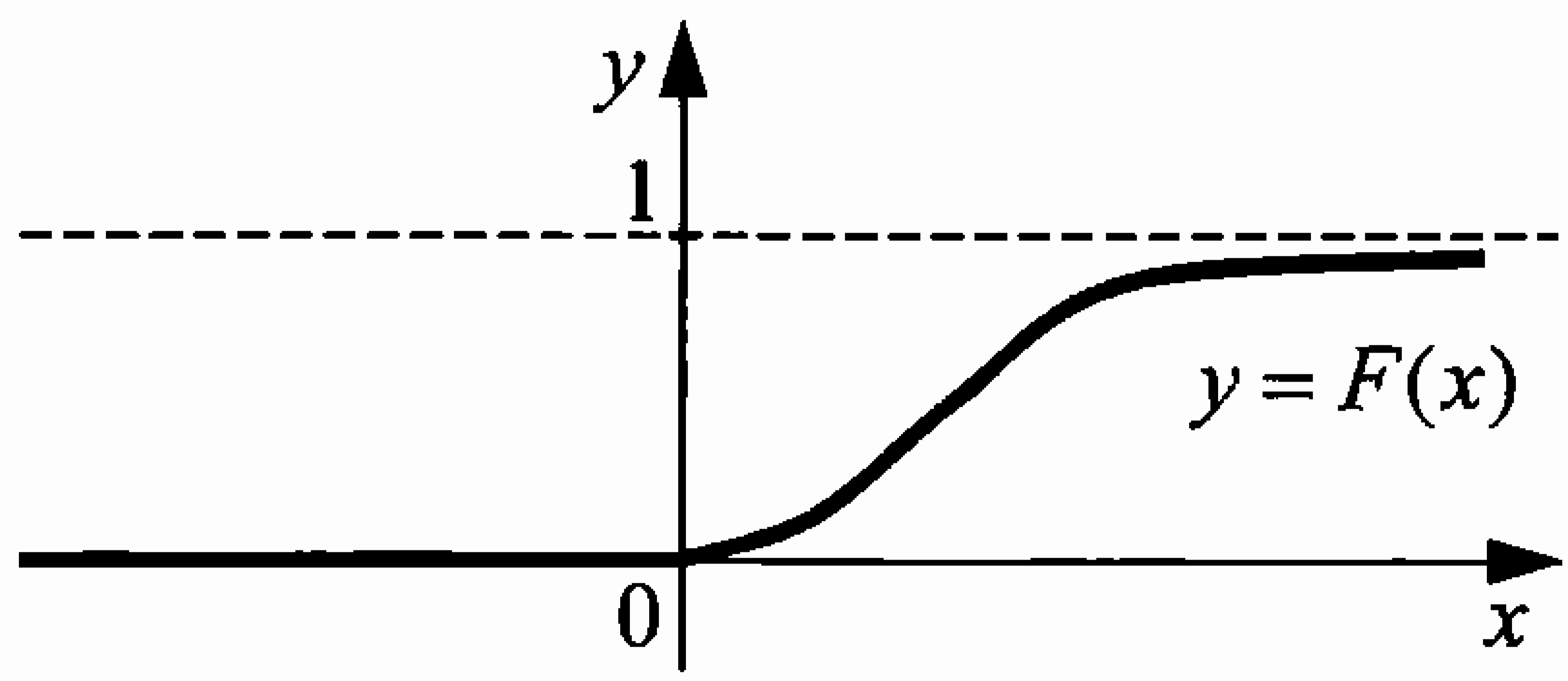
или

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$

Таким образом, *если функция $F(x)$ допускает разложение в ряд по степеням $(x-a)$, то это разложение должно получаться в виде ряда Тейлора.* Это утверждение вытекает из факта единственности разложения функции в степенной ряд. Здесь лишь указан способ как это можно делать. Однако *нет никаких оснований утверждать, что, взяв функцию $F(x)$, которая имеет производные всех порядков, и составив для нее формальное разложение в ряд по формуле Маклорена или Тейлора, обязательно получится ряд, сходящийся и притом именно к $F(x)$.* Соответствующий контрпример рассмотрен далее.

Пример. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую на R функцию

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$



Для всякого $x > 0$ имеем

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, \qquad F''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}},$$

$$F'''(x) = \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

и т. д. вообще $F^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ многочлен относительно $\frac{1}{x}$.

Чтобы найти величины $F^{(n)}(0)$, нельзя просто подставить $x = 0$ в формулу для $F^{(n)}(x)$. Необходимо действовать в соответствии с определением, т. е.

$$F^{(n)}(0+) = \lim_{h \to 0+} \frac{F^{(n-1)}(h) - F^{(n-1)}(0)}{h},$$

но для этого требуется посчитать пределы

$$\lim_{x \to 0+} F^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} = \left\{y = \frac{1}{x}\right\} = \lim_{y \to +\infty} \frac{P_n(y)}{e^y} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{y\to+\infty} \frac{P_n'(y)}{e^y} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{y\to+\infty} \frac{P_n''(y)}{e^y} = \ldots =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{C}{e^y} = 0.$$

Таким образом получаем

$$F'(0+) = \lim_{x\to0+} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to0+} \frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

$$F'(0-) = \lim_{x\to0-} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to0-} \frac{0}{x} = 0,$$

т. е. оба односторонних предела существуют и равны между собой, а значит $F'(0) = F'(0+) = F'(0-) = 0$.

Чтобы найти $F''(0)$ вновь найдем односторонние пределы

$$F''(0+) = \lim_{x\to0+} \frac{F'(x)-F'(0)}{x} = \lim_{x\to0+} \frac{1}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

$$F''(0-) = \lim_{x\to0-} \frac{F'(x)-F'(0)}{x} = \lim_{x\to0-} \frac{0-0}{x} = 0,$$

т. е. $F''(0) = 0$.

Продолжая эти рассуждения, убеждаемся, что $F^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, а потому ряд Маклорена для функции $F(x)$ имеет вид

$$0 + 0\cdot\frac{x}{1!} + 0\cdot\frac{x^2}{2!} + \ldots + 0\cdot\frac{x^n}{n!} + \ldots \equiv 0,$$

т. е. этот ряд сходится к 0, тогда как $F(x) \neq 0$ при $x > 0$.

Поэтому, когда хотят разложить заданную функцию $F(x)$ в степенной ряд, то действуют по следующей схеме:

а) формально составляют ряд Маклорена (Тейлора), т. е. просто вычисляют коэффициенты разложения;

б) полученный формальный ряд исследуют на сходимость, при этом если он сходится, то еще нельзя утверждать, что его суммой является именно заданная функция $F(x)$;

в) далее существует два метода, с помощью которых определяют, будет ли функция $F(x)$ суммой построенного ряда:

1-й метод (искусственный, но более легкий): пользуясь свойствами полученного степенного ряда при помощи дифференцирования или интегрированиия сводят его к уже известным функциям (см. по этому поводу примеры 1 и 2 из § 10.2), однако общего приема, годного для всех случаев, не существует;

2-й метод (прямой, но очень трудоемкий или трудноприменимый): рассматривают разность между $F(x)$ и n-частичной суммой построенного ряда и пытаются непосредственно установить, когда она (по модулю) стремится к нулю при $n \to +\infty$.

В соответствии со вторым методом имеет место

Теорема. *Для того чтобы функция $F(x)$ была разложима в ряд Маклорена (Тейлора) на интервале $(-R; R)$ (или $(a; b)$), необходимо и достаточно, чтобы остаток $R_n(x) \rightrightarrows 0$ на интервале $(-R; R)$ (или $(a; b)$) при $n \to +\infty$.*

11.4. Теорема Вейерштрасса для степенных рядов. Теорема Арцела – Асколи

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ такая, что $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a; b]$, (или для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ и при всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $|P_n(x) - f(x)| < \epsilon$ по-другому $\max\limits_{[a;b]} |P_n(x) - f(x)| < \epsilon$).*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $[a; b] \equiv [0; 1]$, так как в противном случае замена переменных $x = (b-a)t+a$ приводит к указанному случаю. Доказывать теорему будем для функций непрерывных на отрезке $[0;1]$ и таких, что $f(0) = f(1) = 0$, так как иначе, положив $g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$, мы получим функцию с требуемым набором свойств, а такая функция отличается от исходной на многочлен первой степени.

Итак, пусть $f(x) \in C[0;1]$, $f(0) = f(1) = 0$. Доопределим функцию $f(x)$ нулем на множестве $R \setminus [0;1]$. Пусть $\epsilon > 0$ — произвольное, поскольку $f(x) \in C[0;1]$, то по теореме Кантора (см. § 3.9) $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0;1]$ (и вообще на всей числовой прямой, коль скоро $f(x)$ равна нулю на множестве $R \setminus [0;1]$), поэтому существует положительное $0 < \delta_\epsilon < 1$ такое, что $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ при всех x, $y \in [0;1]$ таких, что $|x - y| < \delta_\epsilon$.

Поскольку $f(x) \in C[0;1]$, то по теореме Вейерштрасса (см. § 3.7) $f(x)$ ограничена на $[0;1]$ (и вообще на всей числовой оси), т. е. существует положительное число $A > 0$, такое, что $|f(x)| \le A \quad \forall x \in R$.

Так как $0 < \delta_\epsilon < 1$, то $0 < 1 - \delta_\epsilon^2 < 1$ и поэтому найдется номер N_δ такой, что при всех $n > N_\delta$ выполняется неравенство

$$4A\sqrt{n}(1 - \delta_\epsilon^2)^n < \frac{\epsilon}{2}.$$

Рассмотрим вспомогательную последовательность многочленов степени $2n$, $2n > N_\delta$ вида $Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$, где коэффициент c_n выбирается таким образом, чтобы выполнялось равенство $\int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$. Не вычисляя точного значения c_n, найдем для него некоторую оценку. Для любого $x \in [0;1]$ в силу неравенства Бернулли (см. § 1.3) имеем $(1 - x^2)^n \ge 1 - nx^2$, отсюда

$$\frac{1}{c_n} = \frac{1}{c_n} \cdot 1 = \frac{1}{c_n} \cdot c_n \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx = 2 \int\limits_{0}^{1} (1 - x^2)^n dx \ge$$

$$\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{c_n} > \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow c_n < \sqrt{n}.$$

Отсюда при $\delta_\epsilon \leq |x| \leq 1$ имеем $0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta_\epsilon^2)^n$.

Положим теперь для любого $x \in [0;1]$

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt =$$

$$= \{x+t=\tau\} = \int_0^1 f(\tau)Q_n(\tau-x)\,d\tau,$$

очевидно, $P_n(x)$ многочлен степени $2n$. Покажем, что $\{P_n(x)\}$ и есть искомая последовательность полиномов. Для этого оценим по модулю разность

$$|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1}(f(x+t)-f(x))Q_n(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,dt =$$

$$= \left(\int_{-1}^{-\delta_\epsilon} + \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} + \int_{\delta_\epsilon}^{1}\right)|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,dt \leq$$

$$\leq 2A\int_{-1}^{-\delta_\epsilon} Q_n(t)\,dt + \frac{\epsilon}{2}\int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} Q_n(t)\,dt + 2A\int_{\delta_\epsilon}^{1} Q_n(t)\,dt \leq$$

$$\leq 4A\sqrt{n}(1-\delta_\epsilon^2)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Полученная оценка выполняется при всех $x \in [0;1]$ и для любого $n > N_\delta$, что и завершает доказательство равномерной сходимости $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a;b]$. **Теорема доказана.**

Таким образом если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$, что

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \ \forall x \in [a;b] \quad \text{или} \quad \max_{[a;b]} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

Иначе говоря, всякую непрерывную на отрезке функцию можно с любой наперед заданной степенью точности представить (приблизить) на этом отрезке многочленом.

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует ряд многочленов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} R_i(x)$, равномерно сходящийся на отрезке $[a;b]$ к функции $f(x)$.*

Действительно, членами этого ряда можно выбирать многочлены $R_i(x) = P_i(x) - P_{i-1}(x)$, где $P_i(x)$ — многочлены из доказанной теоремы.

В заключение этого параграфа и главы познакомимся с *критерием компактности в* $C[a;b]$. Для этого нам потребуются следующие два понятия.

Определение. Множество $M \subset C[a;b]$ называется *равномерно ограниченным*, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\forall x(t) \in M$ и $\forall t \in [a;b]$ выполняется неравенство $|x(t)| \leq C$.

Определение. Множество $M \subset C[a;b]$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x(t) \in M$ и $\forall t_1, t_2 \in [a;b]$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство $|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon$.

Теорема (Арцела–Асколи). *Для того чтобы множество $M \subset C[a;b]$ было компактным в $C[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы M было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Пример 1. Множество функций $\{\sin nt\}$, будучи равномерно ограниченным на $[0;1]$, не является равностепенно непрерывным. Действительно, для $\epsilon = 1$ при любом $\delta_n = \dfrac{\pi}{2n} > 0$ для точек $t_1 = 0$ и $t_2 = \dfrac{\pi}{2n}$, принадлежащих отрезку $[0;1]$, и для функции $\sin nt$ выполняется обратное неравенство $|\sin nt_2 - \sin nt_1| \geq 1$. Таким образом множество $\{\sin nt\}$ не компактно в $C[0;1]$. Равномерно ограниченное на $[0;1]$ множество функций $\{t^n\}$ также не компактно в $C[0;1]$. Для доказательства достаточно рассмотреть для $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ пару точек $t_1 = 1$ и $t_2 = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ и функцию t^n.

Пример 2. Множество $M = \{x(t) \in C[a;b] : |x(t)| \leq K, |\dot{x}(t)| \leq L\}$ компактно в $C[0;1]$. Оно равномерно ограничено константой K, равностепенная непрерывность следует из неравенства $|x(t_1) - x(t_2)| = |\dot{x}(\xi)||t_1 - t_2| < L\delta_\epsilon < \epsilon$, если $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{L}$.

12. Интегралы, зависящие от параметра

12.1. Равномерное по одной переменной (параметру) стремление функции двух переменных к пределу по другой переменной

Пусть $x \in X \subset R$, $y \in Y \subset R$, $Z = X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\} \subset D(f(x,y))$, переменную y будем называть *параметром.*

Определение. Если для любого $x \in X$ существует конечный предел $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = g(x)$, то говорят, что функция

$f(x,y)$ *поточечно сходится* к функции $g(x)$ на множестве X при $y \to y_0$.

Обозначают этот тип сходимости следующим образом: $f(x,y) \to g(x)$.

Это определение является обобщением понятия поточечной сходимости функциональных последовательностей (если $Y \equiv N$ или $Y \equiv \{y_n\}$ — последовательность).

Определение. Говорят, что функция $f(x,y)$ *сходится равномерно* к функции $g(x)$ на множестве X при $y \to y_0$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию $0 < |y - y_0| < \delta_\epsilon$, и при всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x,y) - g(x)| < \epsilon$.

Этот тип сходимости принято обозначать $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$.

Теорема 1. *Функция $f(x,y)$ сходится равномерно к функции $g(x)$ на множестве X при $y \to y_0$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности элементов $\{y_n\} \in Y$, сходящейся к y_0, функциональная последовательность $f_n(x) \equiv f(x,y_n) \rightrightarrows g(x)$ (сходится равномерно к функции $g(x)$) на множестве X при $n \to \infty$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in X$, при $y \to y_0$ и $\{y_n\} \in Y$ произвольная последовательность элементов $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$, покажем, что $f_n(x) \equiv f(x,y_n) \rightrightarrows g(x)$, $x \in X$, при $n \to \infty$.

Пусть $\epsilon > 0$ произвольное, тогда в силу равномерной сходимости $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in X$ при $y \to y_0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию $0 < |y - y_0| < \delta_\epsilon$б и при всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x,y) - g(x)| < \epsilon$.

Так как $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$, то для $\delta_\epsilon > 0$ найдется номер $N(\delta)$ такой, что для любого $n > N(\delta)$ выполняется неравенство $0 < |y_n - y_0| < \delta_\epsilon$, тогда $|f(x,y_n) - g(x)| < \epsilon$ или $|f_n(x) - g(x)| < \epsilon$ $\forall x \in X$, $\forall n > N(\delta)$, т.е. $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$.

Достаточность. Пусть для любой последовательности элементов $\{y_n\} \in Y$, сходящейся к y_0, функциональная последовательность $f_n(x) \equiv f(x, y_n) \rightrightarrows g(x)$ (сходится равномерно к функции $g(x)$) на множестве X при $n \to \infty$. Методом от противного покажем, что $f(x, y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in X$ при $y \to y_0$. Допустим, что существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдется $y_\delta \neq y_0$, удовлетворяющий условию $0 < |y_\delta - y_0| < \delta$, и найдется элемент $x_\delta \in X$ такие, что $|f(x_\delta, y_\delta) - g(x_\delta)| \geq \epsilon_0$. Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, тогда, построив последовательности $y_n \to y_0$, $y_n \neq y_0$, и $x_n \in X$ такие, что $|f(x_n, y_n) - g(x_n)| \geq \epsilon_0$, получим функциональную последовательность $f_n(x) \equiv f(x, y_n)$, сходящуюся неравномерно к функции $g(x)$ на множестве $x \in X$. **Теорема доказана.**

Теорема (критерий Коши равномерного стремления функции к предельной). *Функция $f(x, y)$ сходится равномерно к функции $g(x)$ на множестве X при $y \to y_0$ тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любых y', $y'' \in Y$, удовлетворяющих условиям $0 < |y' - y_0| < \delta_\epsilon$, $0 < |y'' - y_0| < \delta_\epsilon$, и при всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x, y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in X$, при $y \to y_0$, тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию $0 < |y - y_0| < \delta_\epsilon$, и при всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x, y) - g(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Если теперь $y', y'' \in Y$ любые, удовлетворяющие условиям $0 < |y' - y_0| < \delta_\epsilon$, $0 < |y'' - y_0| < \delta_\epsilon$, то для них при всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq |f(x, y') - g(x)| + |g(x) - f(x, y'')| <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Достаточность. Пусть для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любых $y', y'' \in Y$, удовлетворяющих условиям $0 < |y' - y_0| < \delta_\epsilon$, $0 < |y'' - y_0| < \delta_\epsilon$, и при всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\} \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$, тогда для $\delta_\epsilon > 0$ найдется номер $N(\delta)$ такой, что для любого $n > N(\delta)$ выполняется неравенство $0 < |y_n - y_0| < \delta_\epsilon$ и при любом $p \in N$, $|y_{n+p} - y_0| < \delta_\epsilon$, но тогда $|f(x,y_n) - f(x,y_{n+p})| < \epsilon$ или $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \epsilon$, т. е. функциональная последовательность $f_n(x) \equiv f(x,y_n) \rightrightarrows g(x)$ сходится равномерно к функции $g(x)$ на множестве X при $n \to \infty$ (в силу критерия Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей см. § 10.1), поэтому в силу доказанной теоремы 1 получаем $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in X$, при $y \to y_0$. **Теорема доказана.**

12.2. Свойства равномерного стремления функции к предельной

Пусть $X \equiv [a;b]$ — компакт.

Теорема (о непрерывности предельной функции). *Пусть выполнены условия:*

а) *функция $f(x,y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a;b]$;*

б) $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, *при* $y \to y_0$,

тогда $g(x)$ непрерывна по $x \in [a;b]$.

Доказательство. Так как $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, при $y \to y_0$, тогда для любой последовательности элементов $\{y_n\} \in Y$, сходящейся к y_0, функциональная последовательность $f_n(x) \equiv f(x,y_n) \rightrightarrows g(x)$ сходится равномерно к функции $g(x)$ на множестве X при $n \to \infty$, но $f_n(x) \in C[a;b]$, поэтому в силу теоремы о перестановке пределов для равномерно сходящихся функциональных последовательностей (см. § 10.2) имеем $g(x) \in C[a;b]$. **Теорема доказана.**

Замечание 1. В соответствии с доказанной теоремой $\forall x_0 \in [a;b]$ справедливо равенство

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = g(x_0) \overset{!!!}{=} \lim_{x\to x_0} g(x) =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

т. е. эту теорему можно было бы назвать теоремой о перестановке пределов.

Теорема (о интегрировании предельной функции). *Пусть выполнены условия:*

а) *функция $f(x,y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a;b]$;*

б) $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, *при* $y \to y_0$,

тогда

$$\int_a^b f(x,y)\,dx \;\to\; \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{при} \quad y \to y_0$$

или

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)dx.$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $g(x) \in\in C[a;b]$, поэтому интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ имеет смысл, как и все остальные. Поскольку $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, при $y \to y_0$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию

$0 < |y - y_0| < \delta_\epsilon$, и при всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $|f(x,y) - g(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$. Отсюда следует

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x,y) - g(x)|\,dx < \epsilon,$$

т. е. получаем требуемое предельное равенство. **Теорема доказана.**

Теорема (о дифференцировании предельной функции). *Пусть выполнены условия:*

а) *функция $f(x,y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ непрерывно дифференцируема по $x \in [a; b]$;*

б) $f(x,y) \to g(x)$, $x \in [a; b]$, *при* $y \to y_0$ *поточечно*;

в) $f'_x(x,y) \rightrightarrows h(x)$, $x \in [a; b]$, *при* $y \to y_0$,

тогда

а′) $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a; b]$, *при* $y \to y_0$;

б′) $g(x) \in C^1[a; b]$;

в′) $g'(x) = h(x)$.

Доказательство. Пусть $\{y_n\} \in Y$ — произвольная последовательность элементов, сходящаяся к y_0, тогда для функциональной последовательности $f_n(x) \equiv f(x, y_n)$ выполнены все условия теоремы о дифференцировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей (см. § 10.2), т. е. $f_n(x) \equiv f(x, y_n) \rightrightarrows g(x)$ или $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a; b]$, при $y \to y_0$, $g(x) \in C^1[a; b]$, $g'(x) = h(x)$. **Теорема доказана.**

Замечание 2. При выполнении условий доказанной теоремой имеем равенство

$$\left(\lim_{y \to y_0} f(x,y)\right)'_x = g'(x) = h(x) = \lim_{y \to y_0} f'_x(x,y).$$

Теорема Дини. *Пусть выполнены условия:*

а) *функция* $f(x,y)$ *при любом фиксированном* $y \in Y$ *непрерывна по* $x \in [a;b]$;

б) $f(x,y) \to g(x)$, $x \in [a;b]$, *при* $y \to y_0$ *поточечно не убывая (не возрастая)*;

в) $g(x) \in C[a;b]$,

тогда $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, *при* $y \to y_0$.

Доказательство. Пусть $\{y_n\} \in Y$ — произвольная последовательность элементов, сходящаяся к y_0, тогда для функциональной последовательности $f_n(x) \equiv f(x,y_n)$ выполнены все условия теоремы Дини (см. § 10.2), поэтому в соответствии с этой теоремой $f_n(x) \equiv f(x,y_n) \rightrightarrows g(x)$ или $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, при $y \to y_0$. **Теорема доказана.**

Теорема (о равномерном стремлении в прямоугольнике). *Пусть* $X \equiv [a;b]$, $Y \equiv [c;d]$, $f(x,y) \in C\{(x;y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$, *тогда* $\forall y_0 \in Y$ *при* $y \to y_0$ $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$, $x \in [a;b]$.

Доказательство. Так как $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом прямоугольнике (т. е. на компакте), то по теореме Кантора $f(x,y)$ равномерно непрерывна на на этом прямоугольнике, т. е. для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любой пары точек (x',y') и (x'',y''), удовлетворяющих условиям $|y'-y''| < \delta_\epsilon$ и $|x'-x''| < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство $|f(x',y') - f(x'',y'')| < \epsilon$. Пусть $x' = x'' = x$, $y' = y$, $y'' = y_0$, тогда для любого $y \in [c;d]$ такого, что $0 < |y - y_0| < \delta_\epsilon$, и при всех $x \in [a;b]$ справедливо неравенство $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \epsilon$, но это означает $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$, $x \in [a;b]$, при $y \to y_0$. **Теорема доказана.**

12.3. Собственные интегралы, зависящие от параметра

а) *случай постоянных пределов интегрирования*

Пусть $f(x,y)$ определена на множестве $\{(x,y) \mid x \in [a;b],\ y \in Y\}$ и при любом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a;b]$, тогда определена функция

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

называемая *собственным интегралом, зависящим от параметра* y.

Простым следствием теоремы об интегрировании предельной функции из предыдущего параграфа является следующая

Лемма. *Пусть выполнены условия:*

а) *$f(x,y)$ определена на множестве $\{(x,y) \mid x \in [a;b],\ y \in Y\}$ и при любом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a;b]$;*

б) *$f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, при $y \to y_0$,*

тогда

$$\lim_{y\to y_0} \mathcal{I}(y) = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \in [a;b],\ y \in [c;d]\}$, тогда $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$.*

Доказательство. В силу теоремы о равномерном стремлении в прямоугольнике (§ 12.2) $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$,

$x \in [a;b]$, при $y \to y_0$. Следовательно, в соответствии с леммой имеем

$$\lim_{y\to y_0} \mathcal{I}(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx = \mathcal{I}(y_0),$$

а это предельное равенство означает, что $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$. **Теорема доказана.**

Теорема (об интегрировании по параметру). *Пусть* $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \in [a;b],\ y \in [c;d]\}$, *тогда* $\mathcal{I}(y)$ *интегрируема по параметру на* $[c;d]$ *и справедлива формула*

$$\int\limits_c^d \mathcal{I}(y)\,dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$, поэтому $\mathcal{I}(y)$ интегрируема. Совпадение повторных интегралов следует из их равенства двойному интегралу. **Теорема доказана.**

Теорема (о дифференцировании по параметру). *Пусть* $f(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C\{(x,y) \mid x \in [a;b],\ y \in [c;d]\}$, *тогда* $\mathcal{I}(y)$ *дифференцируема по параметру на* $[c;d]$ *и справедлива формула*

$$\mathcal{I}'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство. В силу теоремы Лагранжа о среднем

$$f(x,y+h) - f(x,y) = \frac{\partial f(x,y+\theta h)}{\partial y}h, \quad 0 < \theta < 1,$$

причем $\dfrac{\partial f(x, y+\theta h)}{\partial y} \rightrightarrows \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $x \in [a; b]$, при $h \to 0$. Отсюда

$$\frac{\Delta \mathcal{I}}{h} = \frac{\mathcal{I}(y+h) - \mathcal{I}(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta h)}{\partial y}\,dx,$$

поэтому

$$\mathcal{I}'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{I}(y+h) - \mathcal{I}(y)}{h} = \int_a^b \lim_{h\to 0} \frac{\partial f(x, y+\theta h)}{\partial y}\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Теорема доказана.

б) *случай зависимых от параметра пределов интегрирования*

Пусть функция $f(x,y)$ определена на прямоугольнике $\Pi \equiv \{(x,y) \mid x \in [\alpha; \beta],\ y \in [c; d]\}$, функции $a(y)$ и $b(y)$ отображают отрезок $[c; d]$ в отрезок $[\alpha; \beta]$.

Если для любого фиксированного $y \in [c; d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по $x \in [a(y); b(y)]$, то на отрезке $[c; d]$ определена функция

$$\mathcal{I}(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx,$$

представляющая собой *интеграл, зависящий от параметра y, с переменными пределами интегрирования.*

Теорема (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть* $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \in [\alpha;\beta],\ y \in [c;d]\}$, $a(y), b(y) \in C[c;d]$, *тогда* $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $y_0 \in [c;d]$, тогда

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \left(\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} \right) f(x,y)\,dx.$$

Но $\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx$ — интеграл зависящий от параметра с постоянными пределами интегрирования, поэтому он является непрерывной функцией от y, т. е. при $y \to y_0$

$$\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx \;\to\; \mathcal{I}(y_0).$$

Теорема будет доказана, если показать, что при $y \to y_0$

$$\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \;\to\; 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx \;\to\; 0.$$

Действительно, пусть $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)|$, тогда

$$\left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right| \leq M|b(y) - b(y_0)|$$

и
$$\left|\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx\right| \le M|a(y)-a(y_0)|.$$

Поскольку $a(y)$, $b(y) \in C[c;d]$, то при $y \to y_0$, $a(y) \to a(y_0)$, $b(y) \to b(y_0)$, поэтому
$$\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx \to 0,$$
и значит $\mathcal{I}(y) \to \mathcal{I}(y_0)$, т. е. $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$. **Теорема доказана.**

Теорема (о дифференцировании по параметру). *Пусть* $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C\{(x,y) \mid x \in [\alpha;\beta],\ y \in [c;d]\}$, $a(y)$, $b(y)$ *— дифференцируемы на* $[c;d]$, *тогда* $\mathcal{I}(y)$ *дифференцируема по параметру на* $[c;d]$ *и справедлива формула*
$$\mathcal{I}'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $y_0 \in [c;d]$, $y_0 + h \in [c;d]$, тогда
$$\frac{\Delta\mathcal{I}}{h} = \frac{\mathcal{I}(y_0+h) - \mathcal{I}(y_0)}{h} =$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int\limits_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x,y_0+h)\,dx - \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{h}\left[\left(\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} + \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)}\right) f(x,y_0+h)\,dx -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)\, dx \right] =$$

$$= \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}\, dx + \frac{1}{h} \int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0 + h)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{h} \int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0 + h)\, dx.$$

По следствию из первой теоремы о среднем для определенного интеграла (см. § 5.10)

$$\frac{\Delta \mathcal{I}}{h} = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}\, dx -$$

$$- f(\xi_1, y_0 + h) \frac{a(y_0 + h) - a(y_0)}{h} + f(\xi_2, y_0 + h) \frac{b(y_0 + h) - b(y_0)}{h},$$

где $a(y_0) < \xi_1 < a(y_0 + h)$, $b(y_0) < \xi_2 < b(y_0 + h)$. По теореме о дифференцировании по параметру для интегралов с постоянными пределами интегрирования

$$\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}\, dx \to \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx \quad \text{при } h \to 0.$$

Далее, в силу дифференцируемости (а значит, и непрерывности) функций $a(y)$ и $b(y)$ получаем, что при $h \to 0$

$$-f(\xi_1, y_0 + h) \frac{a(y_0 + h) - a(y_0)}{h} \quad \to \quad -f(a(y_0), y_0)\, a'(y_0),$$

$$f(\xi_2, y_0 + h) \frac{b(y_0 + h) - b(y_0)}{h} \quad \to \quad f(b(y_0), y_0)\, b'(y_0),$$

таким образом

$$\mathcal{I}'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{I}(y_0+h) - \mathcal{I}(y_0)}{h} =$$

$$= \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx + f(b(y_0), y_0)\, b'(y_0) - f(a(y_0), y_0)\, a'(y_0).$$

Отсюда, в силу произвольности $y_0 \in [c; d]$, получаем требуемую формулу. **Теорема доказана.**

12.4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля

Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $\{(x, y) \mid x \in [a; +\infty),\ y \in Y\}$ и для любого фиксированного $y \in Y$ сходится несобственный интеграл 1-го рода (см. § 5.12)

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^{t} f(x, y)\, dx,$$

тогда на множестве Y определена функция $\mathcal{I}(y)$, которая называется *несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра* $y \in Y$.

Определение. Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, называется *равномерно сходящимся по параметру* $y \in Y$ к функции $\mathcal{I}(y)$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $x_0 \geq a$ такое, что для любого $t \geq x_0$ и для любого $y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_a^{t} f(x, y)\, dx - \mathcal{I}(y) \right| < \epsilon \quad \text{или} \quad \left| \int\limits_t^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \epsilon.$$

Замечание. Сформулированное определение означает равномерное стремление функции двух переменных

$$F(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx \rightrightarrows \mathcal{I}(y), \quad y \in Y, \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

(см. определение в § 12.1), поэтому данное определение можно переформулировать следующим образом.

Определение. Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, называется *равномерно сходящимся по параметру* $y \in Y$ к функции $\mathcal{I}(y)$, если $F(t,y) \rightrightarrows \mathcal{I}(y)$, $y \in Y$, при $t \to +\infty$.

Далее мы будем пользоваться каждым из этих определений по мере необходимости.

Соответственно

Определение. Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, называется *сходящимся неравномерно по параметру* $y \in Y$ к функции $\mathcal{I}(y)$, если

а) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится поточечно на множестве $y \in Y$, т. е. для любого $\epsilon > 0$ существует $x_0(y) \geq a$ такой, что для любого $l \geq x_0(y)$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_l^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \epsilon;$$

б) существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что для любого $x_0 \geq a$ найдется $l_0 \geq x_0$ и найдется элемент $y_0 \in Y$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{l_0}^{+\infty} f(x,y_0)\,dx \right| \geq \epsilon_0.$$

Справедлив следующий критерий равномерной сходимости несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра:

Теорема (критерий Коши). *Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по параметру* $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\epsilon > 0$ *существует* $x_0 \geq a$ *такое, что для любых* $x_1 \geq x_0$ *и* $x_2 \geq x_0$ *и для любого* $y \in Y$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \right| < \epsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру $y \in Y$, т. е. $F(t,y) \rightrightarrows \mathcal{I}(y)$, $y \in Y$, при $t \to +\infty$, тогда по критерию Коши равномерного стремления функции к предельной (см. § 12.1) для любого $\epsilon > 0$ существует $x_0 \geq a$ такое, что для любых $x_1 \geq x_0$ и $x_2 \geq x_0$ и для любого $y \in Y$ выполняется неравенство $|F(x_1,y) - F(x_2,y)| < \epsilon$ или

$$\left| \int\limits_a^{x_1} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{x_2} f(x,y)\,dx \right| < \epsilon, \quad \text{т. е.} \quad \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \right| < \epsilon.$$

Достаточность. Если выполнено условие Коши, то в соответствии все с той же теоремой (критерий Коши равномерного стремления функции к предельной см. § 12.1) получаем, что $F(t,y) \rightrightarrows \mathcal{I}(y)$, $y \in Y$, при $t \to +\infty$, а это в соответствии с определением и означает равномерную сходимость несобственного интеграла 1-го рода по параметру $y \in Y$. **Теорема доказана.**

Как следствие из критерия Коши равномерной сходимости несобственных интегралов 1-го рода по параметру, получим три достаточных признака равномерной сходимости.

Теорема (признак Вейерштрасса). *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *для любого $y \in Y$ при любом $x \in [a_1, +\infty)$, где $a_1 > a$, выполняется неравенство $|f(x,y)| \le \varphi(x)$;*

б) *несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится,*

тогда несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру $y \in Y$.

Доказательство. Так как несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то в соответствии с критерием Коши сходимости несобственных интегралов 1-го рода (см. § 5.12) для любого $\epsilon > 0$ существует $x_0 \ge a$ такое, что для любых $x_1 \ge x_0$ и $x_2 \ge x_0$ выполняется неравенство $\int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx < \epsilon$. Тогда для любого $y \in Y$ имеем

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\right| \le \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x,y)|\,dx \le \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx < \epsilon,$$

что в соответствии с критерием Коши и означает равномерную сходимость несобственного интеграла 1-го рода, зависящего от параметра, по параметру $y \in Y$. **Теорема доказана.**

Теорема (признак Дирихле). *Пусть для несобственного интеграла вида*

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx$$

выполнены следующие условия:

а) *для любого фиксированного $y \in Y$ функции $g(x,y)$, $f(x,y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ непрерывны по $x \in [a;+\infty)$;*

б) *для любого фиксированного $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонно по x убывает и $g(x,y) \rightrightarrows 0$, $y \in Y$, при $x \to +\infty$;*

в) *функция $F(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx$ ограничена, т. е. существует положительная константа $K > 0$ такая, что $\forall t \geq a$, $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $|F(t,y)| \leq K$,*

тогда несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, $\int\limits_a^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру $y \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x,y)f(x,y)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = g(x,y) & dv = f(x,y)\,dx \\ du = g'_x(x,y) & v = F(x,y) \end{array} \right\} =$$

$$= g(x_2,y)F(x_2,y) - g(x_1,y)F(x_1,y) - \int\limits_{x_1}^{x_2} g'_x(x,y)F(x,y)\,dx,$$

тогда

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x,y)f(x,y)\,dx\right| \le |g(x_2,y)|\cdot|F(x_2,y)| +$$

$$+|g(x_1,y)|\cdot|F(x_1,y)| + \int\limits_{x_1}^{x_2} |g'_x(x,y)|\cdot|F(x,y)|\,dx \le$$

$$\le K(g(x_2,y)+g(x_1,y)) + K\int\limits_{x_1}^{x_2}(-g'_x(x,y))\,dx =$$

$$= K(g(x_2,y)+g(x_1,y)-g(x_2,y)+g(x_1,y)) = 2Kg(x_1,y).$$

Так как $g(x,y) \rightrightarrows 0$, $y \in Y$, при $x \to +\infty$, то для любого $\epsilon > 0$ существует $x_0 \ge a$ такое, что для любого $x \ge x_0$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $g(x,y) < \dfrac{\epsilon}{2K}$, тогда для любых $x_1 \ge x_0$, $x_2 \ge x_0$ и $\forall y \in Y$ имеем

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x,y)f(x,y)\,dx\right| < 2K\cdot\frac{\epsilon}{2K} = \epsilon,$$

т. е. в соответствии с критерием Коши получаем доказываемое утверждение. **Теорема доказана.**

Теорема (признак Абеля). *Пусть для несобственного интеграла вида*

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx$$

выполнены следующие условия:

а) *несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по* $y \in Y$*;*

б) *для любого фиксированного* $y \in Y$ *функция* $g(x, y)$ *монотонна и ограничена по* x,

тогда несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, $\int\limits_a^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по параметру* $y \in Y$.

Доказательство. Пусть $M = \sup |g(x, y)|$. Для произвольного $\epsilon > 0$ существует $x_0 \geq a$ такое, что для любых $x_2 > \xi > x_1 > x_0$ и $\forall y \in Y$ выполняются неравенства

$$\left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2M}, \qquad \left|\int\limits_{\xi}^{x_2} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Поскольку функция $f(x, y)$ интегрируема по $x \in [x_1, x_2]$, а функция $g(x, y)$ монотонна по $x \in [x_1, x_2]$, то по следствию из второй теоремы о среднем значении для определенного интеграла (см. § 5.10) $\exists \xi \in [x_1, x_2]$, такая, что

$$\int\limits_{x_1}^{\xi} g(x,y)f(x,y)\,dx =$$

$$= g(x_1, y)\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(x_2, y)\int\limits_{\xi}^{x_2} f(x,y)\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\left|\int\limits_{x_1}^{\xi} g(x,y)f(x,y)\,dx\right| \leq |g(x_1,y)|\left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x,y)\,dx\right| +$$

$$+ |g(x_2,y)|\left|\int\limits_{\xi}^{x_2} f(x,y)\,dx\right| < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

Теорема доказана.

12.5. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра

Теорема (о непрерывности несобственного интеграла 1-го рода по параметру). *Пусть для функции $f(x,y)$ выполнены следующие условия:*

а) $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \geq a,\ y \in [c;d]\}$;

б) *интеграл* $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по параметру* $y \in [c;d]$,

тогда $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$ *(а значит, и равномерно непрерывна на* $[c;d]$*).*

Доказательство. Так как для любого $t > a$ $f(x,y) \in C\{\Pi_t \equiv \{(x,y) \mid a \leq x \leq t,\ y \in [c;d]\}\}$, тогда для любой числовой последовательности $\{t_n\}$, $t \geq a$, $t_n \to +\infty$ соответствующая функциональная последовательность непрерывных функций $F(t_n,y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx \in C[c;d]$ (см. теорему о непрерывности собственных интегралов, зависящих от параметра § 12.3) сходится равномерно $F(t_n,y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx \rightrightarrows \mathcal{I}(y)$ при $t_n \to +\infty$, $y \in [c;d]$ (см. определение равномерной сходимости несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра § 12.4), поэтому по теореме о перестановке пределов для равномерно сходящихся функциональных последовательностей $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$. **Теорема доказана.**

На самом деле имеет место более общее утверждение, которое приведем здесь без доказательства.

Теорема (усиленная теорема о непрерывности несобственного интеграла 1-го рода по параметру). *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *для любого* $b \geq a$ $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a;b]$, *при* $y \to y_0$, $y \in Y$, y_0 *— предельная точка множества* Y;

б) *интеграл* $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по параметру* $y \in Y$,

тогда $\mathcal{I}(y) \in C(Y)$, *т. е.*

$$\lim_{y\to y_0} \mathcal{I}(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Следствие. *Пусть для функции* $f(x,y)$ *выполнены следующие условия:*

а) $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \geq a,\ y \in [c;d]\}$;

б) $f(x,y) \geq 0$;

в) $f(x,y) \to g(x)$, $x \in [a;+\infty)$, *при* $y \to y_0$ *поточечно и монотонно не убывая* $\forall x \in [a;+\infty)$;

г) $g(x) \in C[a;+\infty)$;

д) *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится,*

тогда непрерывна функция $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \in C[c;d]$.

Действительно, в силу условий имеем двойное неравенство $0 \le f(x,y) \le g(x)$, из которого в силу признака Вейерштрасса (см. § 12.4) следует равномерная сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ по $y \in [c;d]$. Отсюда в соответствии с доказанной теоремой получаем включение $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$.

Теорема Дини (для несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра). *Пусть для функции $f(x,y)$ выполнены следующие условия:*

а) $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \ge a,\ y \in [c;d]\}$;

б) $f(x,y) \ge 0$;

в) $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \in C[c;d]$ *(т. е. интеграл сходится поточечно)*,

тогда интеграл $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y \in [c;d]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\{t_n\}$, $t_n \ge a$, $t_n \to +\infty$, тогда функциональная последовательность $F(t_n,y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx \in$ $\in C[c;d]$, монотонно возрастая, поточечно на $y \in [c;d]$ сходится к функции $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$. Следовательно, по теореме Дини для функциональных последовательностей (см. § 10.2) $F(t_n,y) \rightrightarrows \mathcal{I}(y)$, $y \in [c;d]$, что в соответствии с определением и означает равномерную сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. **Теорема доказана.**

Теорема (об интегрировании по отрезку несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра). *Пусть для функции $f(x,y)$ выполнены следующие условия:*

а) $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \geq a,\ y \in [c;d]\}$;

б) *несобственный интеграл* $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по* $y \in [c;d]$,

тогда функция $\mathcal{I}(y)$ *интегрируема по отрезку* $[c;d]$ *(как непрерывная функция) и имеет место формула*

$$\int\limits_c^d \mathcal{I}(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\{t_n\}$, $t_n \geq a$, $t_n \to +\infty$, тогда функциональная последовательность $F(t_n,y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx \in C[c;d]$ на $y \in [c;d]$ сходится равномерно к функции $\mathcal{I}(y) \in C[c;d]$, тогда по теореме об интегрировании собственных интегралов, зависящих от параметра (см. § 12.3), имеем

$$\int\limits_c^d F(t_n,y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx\right) dy = \int\limits_a^{t_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

По теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей

$$\int\limits_c^d \mathcal{I}(y)\,dy = \int\limits_c^d \lim_{n\to+\infty} F(t_n,y)\,dy = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_c^d F(t_n,y)\,dy =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^{t_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx,$$

таким образом,

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_c^d \mathcal{I}(y)\,dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Теорема доказана.

Теорема (об интегрировании по лучу несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра). *Пусть для функции $f(x,y)$ выполнены следующие условия:*

а) $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \geq a,\ y \geq c\}$;

б) $f(x,y) \geq 0$;

в) *непрерывны функции* $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \in C[c,+\infty)$ *и* $\mathcal{K}(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \in C[a,+\infty)$ (*т. е. оба интеграла сходятся поточечно*),

тогда из сходимости одного несобственного интеграла 1-го рода $\int\limits_c^{+\infty} \mathcal{I}(y)\,dy$ *или* $\int\limits_a^{+\infty} \mathcal{K}(x)\,dx$ *следует сходимость другого, причем они равны, т. е.*

$$\int\limits_c^{+\infty} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Доказательство. По теореме Дини для несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра, получаем равномерную сходимость интегралов $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ по $y \in [c;d]$, $\forall d \geq c$ и $\mathcal{K}(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ по $x \in [a;b]$,

$\forall b \geq a$. Пусть для определенности сходится интеграл $\int\limits_c^{+\infty} \mathcal{I}(y)\,dy$. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\{t_n\}$, $t_n \geq a$, $t_n \to +\infty$, тогда в силу предыдущей теоремы для любого t_n имеем

$$\int\limits_a^{t_n} \mathcal{K}(x)\,dx = \int\limits_a^{t_n} \left(\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_c^{+\infty} \left(\int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_c^{+\infty} F(t_n, y)\,dy.$$

Но члены функциональной последовательности $F(t_n, y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx$ обладают свойствами:

а) непрерывны по y, т. е. $F(t_n, y) \in C[c;d]$ $\forall d > c$;

б) $F(t_n, y) \rightrightarrows \mathcal{I}(y) \in C[c;d]$, $y \in [c;d]$, при $n \to +\infty$, $\forall d > c$;

в) $0 \leq F(t_n, y)$ — не убывающая функциональная последовательность на отрезке $y \in [c;d]$, $\forall d \geq c$, т. е. $0 \leq F(t_n, y) \leq \mathcal{I}(y)$, $y \in [c;d]$, $\forall n \in N$, $\forall d > c$, тогда в силу произвольности $\{t_n\}$ и $d > c$ выполняется неравенство $0 \leq F(t,y) \leq \mathcal{I}(y)$, $\forall y \geq c$, $\forall t \geq a$.

Поскольку, в силу предположения, интеграл $\int\limits_c^{+\infty} \mathcal{I}(y)\,dy$ сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. § 12.4) интеграл $\int\limits_c^{+\infty} F(t,y)\,dy$ сходится равномерно по параметру $t \in [a; +\infty)$, поэтому в силу равномерной сходимости $F(t,y) \rightrightarrows \mathcal{I}(y)$, $y \in [c; +\infty)$, при $t \to +\infty$ имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} \mathcal{K}(x)\,dx = \lim_{t_n \to +\infty} \int\limits_a^{t_n} \mathcal{K}(x)\,dx =$$

$$= \lim_{t_n \to +\infty} \int\limits_c^{+\infty} F(t_n, y)\, dy \overset{\bullet}{=} \int\limits_c^{+\infty} \mathcal{I}(y)\, dy,$$

• — здесь используется теорема о непрерывности несобственного интеграла 1-го рода в усиленной формулировке. **Теорема доказана.**

Пример (интеграл Пуассона). Вычислить интеграл Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Сходимость этого интеграла была доказана в примере 1 из § 5.13. Введем обозначение

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

и рассмотрим функцию

$$f(t, y) = ye^{-(1+t^2)y^2} \in C\{(t, y) \mid t \geq 0,\ y \geq 0\},$$

для которой имеем

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(t, y)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-(1+t^2)y^2} dt =$$

$$= e^{-y^2} \int\limits_0^{+\infty} ye^{-t^2y^2} dt = e^{-y^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{-y^2} \cdot I,$$

$$\mathcal{K}(t) = \int\limits_0^{+\infty} f(t, y)\, dy = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-(1+t^2)y^2} dy =$$

$$= -\frac{1}{2(1+t^2)} e^{-(1+t^2)y^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2(1+t^2)},$$

т. е. $\mathcal{I}(y) \in C(y \geq 0)$, $\mathcal{K}(t) \in C(t \geq 0)$, причем сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{K}(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4},$$

поэтому в соответствии с теоремой об интегрировании по лучу несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра, получаем сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{I}(y)\, dy$ и равенство

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{I}(y)\, dy = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(t)\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Но $\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{I}(y)\, dy = I^2$, отсюда $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ или $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Теорема (о дифференцировании по параметру несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра). *Пусть для функции $f(x,y)$ выполнены следующие условия:*

а) $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \geq a,\ y \in [c;d]\}$;

б) *интеграл* $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\, dx$ *сходится поточечно для любого* $y \in [c;d]$;

в) *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$ *сходится равномерно по* $y \in [c; d]$,

тогда для любого $y \in [c; d]$ *функция* $\mathcal{I}(y)$ *дифференцируема, причем*

$$\mathcal{I}'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\{t_n\}$, $t_n \geq a$, $t_n \to +\infty$ и соответствующую ей функциональную последовательность $F(t_n, y) = \int\limits_a^{t_n} f(x, y)\, dx$. В силу условий теоремы поточечно сходится функциональная последовательность $F(t_n, y) \to \mathcal{I}(y)$ $\forall y \in [c; d]$ и равномерно на $y \in [c; d]$ сходится функциональная последовательность $F'_y(t_n, y)$, тогда по теореме о дифференцировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей $F'_y(t_n, y) \rightrightarrows \mathcal{I}'(y)$, но

$$F'_y(t_n, y) = \int\limits_a^{t_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx,$$

т. е.

$$\mathcal{I}'(y) = \lim_{n \to +\infty} F'_y(t_n, y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

Теорема доказана.

Замечание (о несобственных интегралах 2-го рода). Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $\{(x, y) \mid x \in [a; b],\ y \in Y\}$, для любого фиксированного

$y \in Y$ неограничена при $x \to a+$ и сходится несобственный интеграл 2-го рода, тогда выражение

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x,y)\,dx$$

называется *несобственным интегралом 2-го рода, зависящим от параметра.*

Определение. Несобственный интеграл 2-го рода, зависящий от параметра, называется *равномерно сходящимся по параметру* $y \in Y$, если при $a < t < b$

$$F(t,y) = \int_t^b f(x,y)\,dx \rightrightarrows \mathcal{I}(y), \quad y \in Y, \quad \text{при } t \to a+\,.$$

Пусть $f(x,y) \in C\{(x,y) \mid x \in [a;b],\ y \in Y\}$, тогда

$$\int_t^b f(x,y)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = a + \dfrac{1}{\tau} \\ dx = -\dfrac{d\tau}{\tau^2} \end{array} \right\} = -\int_{\frac{1}{t-a}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a + \frac{1}{\tau}, y\right) \frac{d\tau}{\tau^2} =$$

$$= \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{t-a}} f\left(a + \frac{1}{\tau}, y\right) \frac{d\tau}{\tau^2}.$$

Если сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, т. е. существует предел $\lim\limits_{t\to a+} \int\limits_t^b f(x,y)\,dx$, то существует предел при $\dfrac{1}{t-a} \to +\infty$ правой части полученного равенства, а значит доказана сходимость несобственного интеграла 1-го рода

$$\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a+\frac{1}{\tau}, y\right) \frac{d\tau}{\tau^2}$$

и его равенство интегралу $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Справедливо и обратное утверждение, т. е. из сходимости полученного несобственного интеграла 1-го рода следует сходимость исходного несобственного интеграла 2-го рода и равенство интегралов между собой. Поэтому на несобственные интегралы 2-го рода, зависящие от параметра, можно распространить все теоремы этого параграфа. В заключение отметим, что интеграл вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

в котором первое слагаемое — интеграл от неограниченной функции (несобственный интеграл 2-го рода), а второй — интеграл 1-го рода, называется *равномерно сходящимся*, если равномерно сходятся оба интеграла, стоящих в правой части равенства.

12.6. Интегралы Эйлера

Эйлеровым интегралом первого рода или *бета-функцией* (B-функцией) называется интеграл

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

здесь α и β — параметры. Если $\alpha < 1$ и $\beta < 1$, то $B(\alpha,\beta)$ — несобственный интеграл, зависящий от параметров, причем особенности (т. е. неограниченность) у подынтегральной функции в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Эйлеровым интегралом второго рода или *гамма-функцией* (Γ-функцией) называется интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

при $\alpha < 1$ $x = 0$ — особая точка подынтегральной функции. В примере 3 из § 5.13 было показано, что $\Gamma(\alpha)$ определена при всех $\alpha > 0$. В этом параграфе изучим более подробно свойства этих двух специальных функций.

Γ-*функция*

1. *Функция* $\Gamma(\alpha)$ *непрерывна в области* $\alpha > 0$.

Действительно, для доказательства утверждения покажем, что на любом отрезке $[\alpha_0; A_0]$, $0 < \alpha_0 < A_0$ интеграл сходится равномерно. При всех $x > 0$ и $\forall\alpha \in [\alpha_0; A_0]$ справедлива оценка $x^{\alpha-1}e^{-x} \le e^{-x}[x^{\alpha_0-1} + x^{A_0-1}]$ (так как при $0 < x < 1$ $x^{\alpha-1} < x^{\alpha_0-1}$, а при $1 \le x$ $x^{\alpha-1} < x^{A_0-1}$), но интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]\,dx = \Gamma(\alpha_0)+\Gamma(A_0)$ сходится, поэтому по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (см. § 12.4), получаем равномерную сходимость интеграла для $\Gamma(\alpha)$ на любом отрезке $[\alpha_0; A_0]$. Но из равномерной сходимости следует, что $\Gamma(\alpha) \in C[\alpha_0; A_0]$ (см. § 12.5), учитывая теперь произвольность отрезка $[\alpha_0; A_0] \subset R$, получаем $\Gamma(\alpha) \in C(0; +\infty)$.

2. *Функция* $\Gamma(\alpha)$ *бесконечно дифференцируема при* $\alpha > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}$, тогда $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha} = \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}$, причем $f(x,\alpha)$, $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha) \in C\{(x,\alpha) \mid$

$x > 0$, $\alpha \in [\alpha_0; A_0]\}$, здесь $[\alpha_0; A_0] \subset (0; +\infty)$ — произвольный отрезок.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \ln x \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-x}\, dx,$$

имеющий (по внешнему виду) две особенности: бесконечный предел интегрирования (1-го рода) и неограниченность подынтегральной функции (2-го рода) при $x \to 0+$. Исследуем каждую из этих особенностей отдельно.

Пусть $0 < \epsilon_0 < \alpha_0$, тогда $x^{\epsilon_0} \cdot \ln x \to 0$ при $x \to 0+$, поэтому найдется $0 < \delta < 1$ такое, что для любого $x \in (0; \delta]$ выполнено неравенство $|x^{\epsilon_0} \cdot \ln x| \le 1$ и, следовательно, справедлива оценка

$$\ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} = \ln x \cdot x^{\epsilon_0} \cdot x^{\alpha - \epsilon_0 - 1} \cdot e^{-x} \le$$
$$\le 1 \cdot x^{\alpha - \epsilon_0 - 1} \cdot 1 \le x^{\alpha_0 - \epsilon_0 - 1} = \frac{1}{x^{1 - (\alpha_0 - \epsilon_0)}},$$

тогда

$$\int\limits_0^{\delta} \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx \le \int\limits_0^{\delta} \frac{dx}{x^{1-(\alpha_0 - \epsilon_0)}} = \left.\frac{x^{\alpha_0 - \epsilon_0}}{\alpha_0 - \epsilon_0}\right|_0^{\delta} = \frac{\delta^{\alpha_0 - \epsilon_0}}{\alpha_0 - \epsilon_0}.$$

Таким образом, по признаку Вейерштрасса получим равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{\delta} \ln x \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-x}\, dx \quad \text{по} \quad \alpha \ge \alpha_0.$$

Пусть теперь $\alpha \le A_0$, тогда $\dfrac{\ln x}{x} \cdot x^{A_0 + 2} e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$, так как при таком стремлении каждый из множителей $\dfrac{\ln x}{x}$ и $x^{A_0+2} e^{-x}$ стремится к нулю, в чем можно убедиться, например, с помощью правила Лопиталя. Поэтому существует $\delta_1 > 1$ такое, что при всех $x \geq \delta_1$ выполняется неравенство $\frac{\ln x}{x} \cdot x^{A_0+2} e^{-x} < 1$, т. е. при всех $x \geq \delta_1$ и $\forall \alpha \leq A_0$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{\ln x}{x} \cdot x^{\alpha} e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx \leq \int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{\delta_1}^{+\infty} = \frac{1}{\delta_1},$$

т. е. интеграл $\int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса по $\alpha \in [\alpha_0; A_0]$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{\delta}^{\delta_1} \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx,$$

в котором $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \in C\{(x, \alpha) \mid x \in [\delta; \delta_1],\ \alpha \in [\alpha_0; A_0]\}$, но это собственный интеграл, зависящий от параметра, с постоянными пределами интегрирования. Таким образом, окончательно получаем, что интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx = \left(\int\limits_{0}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\delta_1} + \int\limits_{\delta_1}^{+\infty}\right) \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$$

сходится равномерно по $\alpha \in [\alpha_0; A_0]$, и значит функция $\Gamma(\alpha)$ (интеграл, зависящий от параметра) дифференцируема по $\alpha \in [\alpha_0; A_0]$, и в силу произвольности отрезка $[\alpha_0; A_0]$

получаем на луче $\alpha > 0$ равенство

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx$$

(см. теорему о дифференцировании несобственных интегралов, зависящих от параметра, из § 12.5).

Повторив все проведенные рассуждения относительно $\Gamma'(\alpha)$, получим

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx.$$

Далее по индукции доказывается, что Г-функция бесконечно дифференцируема при $\alpha > 0$ и

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln^n x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx.$$

3. *Формула приведения.* Рассмотрим выражение для $\Gamma(\alpha+1)$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} \cdot e^{-x}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x^{\alpha} & dv = e^{-x}\,dx \\ du = \alpha x^{\alpha-1}\,dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Равенство $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ называется *формулой приведения.*

Очевидно,

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

поэтому если $\alpha = n+1$, $n \in N$, то

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1) = \ldots = n!.$$

Если $\alpha = \dfrac{1}{2}$, то

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \left\{\begin{array}{c} t = x^{\frac{1}{2}} \\ x = t^2 \end{array}\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Если $n-1 < \alpha \le n$, то

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = \ldots =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1),$$

здесь $0 < \alpha - n + 1 \le 1$, поэтому достаточно знать (затабулировать) значения функции $\Gamma(\alpha)$ при $\alpha \in (0;1]$, чтобы найти ее значения при любых $\alpha > 0$.

Справедливо также следующее равенство:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

называемое *формулой дополнения*, которое приводим здесь без доказательства.

Замечание (о формальном продолжении). В соответствии с формулой приведения при любом $\alpha > 0$ справедливо равенство $\Gamma(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$. Но правая часть этого равенства определена и при $\alpha \in (-1; 0)$, поэтому формально $\forall\alpha \in (-1;0)$ положим $\Gamma(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$. Далее по такому же правилу можно определить Г-функцию при $\alpha \in (-2; -1)$ и т. д.

Замечание (формула Стирлинга). Для числа $n!$ в этом параграфе было получено интегральное представление

$$n! = \Gamma(n+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-x}\,dx,$$

из которого в свою очередь можно вывести следующую *формулу Стирлинга*, а именно, существует число $\omega \in (-1; 1)$ такое, что

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{n}}\right).$$

B-функция

1. *B-функция определена при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.*

Действительно, представим B-функцию в виде суммы

$$B(\alpha,\beta) = \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\right) x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

и исследуем каждое слагаемое в отдельности.

Если $0 < x < \dfrac{1}{2}$, то

$$(1-x)^{\beta-1} \le C(\beta) = \begin{cases} 1, & \beta \ge 1; \\ \dfrac{1}{2^{\beta-1}}, & \beta < 1, \end{cases}$$

тогда $0 < x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leq C(\beta) \cdot x^{\alpha-1}$, но интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} C(\beta) \cdot x^{\alpha-1}\,dx$ сходится при любых $\alpha > 0$, поэтому по признаку сравнения интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ сходится при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Причем в любой области $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ и $\beta \geq 0$ сходимость будет равномерной по α и β, так как при $\beta \to 0+$ $\dfrac{1}{2^{\beta-1}} \to 2-$, и значит справедлива оценка

$$0 < x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leq 2 \cdot x^{\alpha_0-1} \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ сходится при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Причем в любой области $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq \beta_0 > 0$ сходимость будет равномерной по α и β. Итак, интеграл для $B(\alpha, \beta)$ сходится при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и сходится равномерно по α и β на множестве $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ и $\beta \geq \beta_0 > 0$.

2. *Свойство симметрии.* B-функция при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ удовлетворяет равенству $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

Действительно,

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = 1-t \\ dx = -dt \\ t = 1-x \end{array} \right\} =$$

$$= -\int\limits_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}\,dt = \int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt = B(\beta, \alpha).$$

3. *Формула приведения* для B-функции при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ имеет вид $B(\alpha+1, \beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta)$. Докажем ее:

$$B(\alpha+1,\beta)=\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta-1}\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} u=x^\alpha & dv=(1-x)^{\beta-1}\,dx \\ du=\alpha x^{\alpha-1}\,dx & v=-\dfrac{(1-x)^\beta}{\beta}\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\beta}x^\alpha(1-x)^\beta\Bigg|_0^1+\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\,dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\cdot(1-x)\,dx=\frac{\alpha}{\beta}[B(\alpha,\beta)-B(\alpha+1,\beta)],$$

т. е.

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta)-\frac{\alpha}{\beta}B(\alpha+1,\beta);$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta);$$

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

В силу свойства симметрии

$$B(\alpha,\beta+1)=B(\beta+1,\alpha)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\beta,\alpha)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$$

или

$$B(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

Связь между эйлеровыми интегралами

Для получения формулы связи представим интегралы Эйлера в другой форме

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\left\{\begin{array}{c} x=\dfrac{t}{t+1}=1-\dfrac{1}{t+1}\\ dx=\dfrac{dt}{(t+1)^2}\\ t=\dfrac{1}{1-x}-1\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{(t+1)^{\beta-1}}\cdot\frac{dt}{(t+1)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}}\,dt,$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=\left\{\begin{array}{c} x=ut,\quad u>0\\ dx=u\,dt\\ t=\dfrac{x}{u}\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{-ut}u\,dt=u^{\alpha}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-ut}\,dt.$$

Заменим в выражении для Γ-функции аргументы u на $1+v$ и α на $\alpha+\beta$, тогда

$$\Gamma(\alpha+\beta)=(1+v)^{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}\,dt;$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=\int_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}\,dt.$$

Умножим это равенство на $v^{\alpha-1}$

$$\Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=\int_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}v^{\alpha-1}\,dt.$$

Далее в предположении, что $\alpha > 1$, $\beta > 1$, введем функцию

$$f(t,v) = t^{\alpha+\beta-1}v^{\alpha-1}e^{-(1+v)t} \in C\{(t,v) \mid t \geq 0,\ v \geq 0\},$$

$$f(t,v) \geq 0,$$

тогда

$$\mathcal{I}(v) = \int\limits_0^{+\infty} f(t,v)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}v^{\alpha-1}e^{-(1+v)t}\,dt =$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}},$$

причем $\mathcal{I}(v) \in C(v \geq 0)$. С другой стороны,

$$\mathcal{K}(t) = \int\limits_0^{+\infty} f(t,v)\,dv = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}v^{\alpha-1}e^{-(1+v)t}\,dv =$$

$$= t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\int\limits_0^{+\infty} v^{\alpha-1}e^{-vt}\,dv =$$

$$= t^{\beta-1}e^{-t}\int\limits_0^{+\infty} (vt)^{\alpha-1}e^{-vt}\,d(vt) = t^{\beta-1}e^{-t}\Gamma(\alpha),$$

где $\mathcal{K}(t) \in C(t \geq 0)$ и сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\Gamma(\alpha)\,dt = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta),$$

поэтому по теореме об интегрировании по лучу несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра (см.

§ 12.5), получаем сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{I}(v)\,dv$ и равенство $\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{I}(v)\,dv$. Но

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{I}(v)\,dv = \Gamma(\alpha+\beta)\int\limits_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv = \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta),$$

поэтому

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$$

или

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{при} \quad \alpha > 1,\ \beta > 1.$$

Продолжим полученную формулу на $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Из равенства

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

получаем

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}B(\alpha,\beta+1) = \\ = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta);$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta)\ \Gamma(\alpha+\beta+2) = \\ = (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta),$$

т. е.

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\cdot\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$$

или

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{при} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Библиографический список

1. *Ильин, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М. : ИД Юрайт, 2013. — Т. 1. — 660 с.

2. *Ильин, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М. : ИД Юрайт, 2013. — Т. 2. — 357 с.

3. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2004. — Т. 1. — 446 с.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2004. — Т. 2. — 464 с.

5. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2008. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — 704 с.

6. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. — 720 с.

7. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2006. — Т. 3. Гармонический анализ. Элементы функционального анализа. — 352 с.

Дополнительные учебники

8. *Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. — М. : Дрофа, 2008. — 640 с.

9. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2009. — Т. 1. — 608 с.

10. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2009. — Т. 2. — 800 с.

11. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2009. — Т. 3. — 656 с.

12. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 1. — 468 с.

13. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 2. — 448 с.

14. *Тер-Крикоров, А. М.* Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 672 с.

15. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Т. 1. — 648 с.

16. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — Т. 2. — 464 с.

17. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 1. — 400 с.

18. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 2. — 624 с.

19. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 1. — 664 с.

20. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 2. — 794 с.

21. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1967. — Т. 1. — 704 с.

22. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1970. — Т. 2. — 672 с.

23. *Рудин, У.* Основы математического анализа / У. Рудин. — М. : Мир, 1976. — 320 с.

Основные задачники

24. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : АСТ, 2009. — 560 с.

25. Математический анализ в вопросах и задачах : в 2 т. / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. — СПб. : Лань, 2008. — 480 с.

26. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : Дрофа, 2001. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление. — 728 с.

27. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — 712 с.

28. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. — 496 с.

29. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 2. Интегралы. Ряды. — 505 с.

30. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 3. Функции нескольких переменных. — 473 с.

Дополнительные задачники

31. *Марон, И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И. А. Марон. — СПб. : Лань, 2008. — 400 с.

32. Задачник по курсу математического анализа : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1971. — Т. 1. — 343 с.

33. Задачник по курсу математического анализа : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М.: Просвещение, 1971. — Т. 2. — 336 с.

34. *Очан, Ю. С.* Сборник задач по математическому анализу / Ю. С. Очан. — М.: Просвещение, 1981. — 271 с.

35. *Шибинский, В. М.* Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа / В. М. Шибинский. — М.: Высш. шк., 2007. — 544 с.

36. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М.: «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 1. — 304 с.

37. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М.: «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 2. — 416 с.

38. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. — М.: Высш. шк., 1966. — 464 с.